Introdução à Lógica Contemporânea

Ricardo Pereira Tassinari

Departamento de Filosofia – UNESP

2014

PREFÁCIO

A Lógica, hoje, é uma vasta área do conhecimento, extremamente complexa e profunda. Este livro visa introduzir, de forma sucinta, o leitor a alguns temas básicos da Lógica contemporânea e, correlativamente, a alguns temas de História e Filosofia da Lógica.

Este livro é o resultado de um projeto de elaboração de material didático para as disciplinas de Lógica (I e II) do Curso de Graduação em Filosofia da UNESP, que começou em 2003 e continua até hoje. Durante esses anos, muitos temas foram inseridos, retirados, ou modificados, de forma a tratar de questões importantes a uma reflexão filosófica sobre o papel da Lógica Contemporânea. Em especial, este livro visa fornecer elementos para tratar de duas questões principais:

1. A Lógica como ciência do raciocínio correto; e

2. A relação da Lógica com as teorias científicas (antigas e contemporâneas); em especial, em relação a fundamentação das teorias científicas contemporâneas (como, por exemplo, Matemática, Computação, Física, Biologia, Psicologia, Linguística, etc.); e, em particular, a fundamentação da Matemática a partir de uma teoria de conjuntos, mais especificamente, a partir da Teoria ZFC.

O material aqui reunido também visa possibilitar a discussão sobre as seguintes questões.

3. O uso de linguagens artificiais para a Lógica melhor desempenhar os itens 1 e 2 acima.

4. As noções de correção e de completude de uma teoria (formal) no contexto do item acima.

5. A existência de diversas lógicas e a possibilidade de se considerar a unidade da Lógica frente a essa diversidade.

6. Os limites do conhecimento por teorias formais, em especial, resultados decorrentes do PrimeiroTeorema da Incompletude de Gödel.

7. A autonomia da disciplina Lógica em relação a certas metafísicas ou ontológicas particulares (de forma a uma mesma lógica servir a correntes metafísicas ou ontológicas diferentes).

De forma geral, podemos dizer que esta obra se apoia em uma visão operacional da Lógica e não em uma visão metafísica ou ontológica particular, o que acentua seu carater abstrato, mas sem perder a correlação com certa "materialidade" histórica.

O conteúdo deste livro é, em geral, muito extenso, até mesmo para um ano de estudo de Lógica. Nesse sentido, os capítulos do livro foram elaborado de forma a se poder utilizar apenas de alguns independentemente dos outros (aqueles que o professor achar os mais relevantes), ficando os restantes como material para um aprofundamento dos estudos pelos alunos.

Índice

Introdução: O Que é a Lógica? (Uma Primeira Visão)

A Lógica se inicia propriamente com Aristóteles e, no decorrer da História da Ciência e da Filosofia (Antiga, Medieval, Moderna e, principalmente, Contemporânea), recebe uma diversidade de exposições e sistematizações. Nesse trajeto histórico, os resultados mais comuns da Lógica se desvencilham de uma grande parte das posições metafísicas e ontológicas particulares (no sentido de serem usados e ensinados por correntes de pensamentos com posições metafísicas e ontológicas diferentes) e leva a Lógica a se constituir como disciplina autônoma.

Notemos então que a palavra "Lógica", segundo sua etimologia, é o estudo do λόγος (Lógos), termo grego cujas algumas acepções (que nos interessa aqui) são: (1) Palavra, (2) Discurso, (3) Razão, (4) Proporção.

Em um sentido muito amplo, a Lógica pode ser entendida como o Estudo do Pensar ou do Raciocinar. Neste caso, λόγος é tomada na acepção de Razão (*cf.*, por exemplo, Hegel, 1995, §18-19). Esse sentido é, porém, mais amplo do que o adotado usualmente nos manuais de Lógica. Nestes, se admite que:

$$\text{Pensar} \xrightarrow{\text{se expressa por}} \text{Argumentos}$$

Nesse sentido, são, pois, os argumentos que são estudados na Lógica; notemos, nesse caso, λόγος com a acepção de Razão, Discuso e Palavra.

Podemos, então, dar a seguinte delimitação INICIAL[1].

Lógica: estudo da forma do pensar expresso por argumentos.

Às vezes, usa-se o termo "Lógica Simbólica" para designar a Lógica, enquanto esse estudo do argumento se utiliza da noção abstrata de signo na explicitação da forma dos argumentos.

Nesse sentido, a Lógica Contemporânea (incluindo nesta a Lógica Simbólica) resulta de uma evolução natural da Lógica, na busca de regras que permitam realizar raciocínios corretos, chegando até a criar linguagens artificiais precisas tais que para construir um raciocínio correto, basta seguir suas regras sintáticas.

Para a elaboração de tais linguagens, procedemos por análises que podem, esquematicamente, serem representadas pelo seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Signos} & \Leftrightarrow & \text{Significados} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
\begin{array}{c}\text{Operações}\\ \text{sobre signos}\end{array} & \Leftrightarrow & \begin{array}{c}\text{Ações e operações}\\ \text{sobre significados}\end{array}
\end{array}$$

[1] Sobre a impossibilidade de uma definição precisa da Lógica no início de seu estudo, veja GRANGER 1955, Introdução.

Que, em nosso caso, torna-se:

Sentenças	⇔	Proposições
⇕		⇕
Consequência Sintática (Demonstrações)	⇔	Consequência Semântica

Observemos que signos são termos utilizados para representar algo. Em especial, os temos "água", "water", "Wasser" e "H2O" são signos que designam a água.

Existe, então, uma diferença importante entre uso e menção de um signo. Por exemplo, eu uso o termo "água" quando afirmo que a água ferve a 100 °C; mas eu menciono o termo "água" quando digo "água" tem 4 letras (notemos que não é a substância água que tem 4 letras mas o signo que eu uso para designá-la). Notemos que as aspas são utilizadas para distinguir o uso e a menção do signo (o uso é sem aspas; a menção vem entre aspas).

Não precisamos nos limitar a apenas uma palavra. Nesse sentido, por exemplo, a sequência de palavras "a água ferve a 100 °C" é um signo que pode ser *usado* para dizer que a água ferve a 100 °C. Aqui, pois, se insere uma distinção importante entre sentenças e proposições: sentenças são signos usados para designar proposições, por exemplo, a sentença "a água ferve a 100 °C" é um signo que é *usada* para designar a proposição a água ferve a 100 °C. É nesse sentido que operaremos sobre sentenças (signos) para representar operações sobre proposições[2].

A partir dessa análise e distinção podemos, pois, criar e usar teorias formais, ou sistemas formais, com linguagens artificiais precisas, tais que regras sintáticas garantam a validade inferencial (como será definida aqui posteriormente) de um argumento; como o fez, por exemplo, Gottlob Frege (1848-1925), que criou um sistema deste tipo que denominou de "Conceitografia", tal que, como nos diz Frege (1893, respectivamente pp. 190 e 189), "a obediência à gramática já garantisse a correção formal do curso do pensamento", criando "um meio de evitar mal-entendidos e, ao mesmo tempo, erros no próprio pensamento".

Veremos, ainda, que essa busca da expressão de raciocínios corretos por teorias ou sistemas formais leva a explicitar a possibilidade de uma infinidade de raciocínios, levando a possibilidade de mais de uma lógica.

Notemos que algumas vezes tal estudo é denominado também de "Lógica Matemática", já que na análise do argumento se revela a forma matemática da argumentação expressa na forma dos sistemas de operações sobre signos. Esse sentido é muito próximo ao ideal de Leibniz (1646-1716) de um *calculus ratiocinator* inerente a uma *Mathesis universalis*: "*Tenho para mim que a invenção da forma dos silogismos é uma das mais belas do espírito humano, e mesmo das mais consideráveis. É uma espécie de* matemática universal [Mathesis universalis]" (Leibniz apud BLANCHÉ e DUBUCS, 1996, pp. 193-194; *cf.* também TASSINARI, 2011).

Temos também que tais resultados que a Lógica Simbólica fornece podem servir à fundamentação de boa parte das Ciências Contemporâneas, estabelecendo nela uma espécie de *lingua characteristica universalis*, como proposta também por Leibniz.

[2] Não é nosso objetivo aqui discutir o que vem a ser uma proposição ou a sua natureza, questões pertencentes à, por exemplo, Filosofia da Linguagem ou à Teoria do Conhecimento.

Por fim, podemos nos perguntar:

Será que podemos descrever todas as formas do pensamento correto?

Essa é uma pergunta importante, na Lógica, e que, como veremos, acaba se relativizando ao fragmento da linguagem considerado. Segundo o fragmento considerado, ela terá respostas tanto afirmativa quanto negativa. De uma forma mais restrita, porém eficaz, o que nos importa aqui (e que deverá ser levado em conta durante o decorrer desta disciplina para não se exigir dela algo que, efetivamente, não se pretende) é que:

A Lógica Contemporânea estabelece em parte a forma do pensar correto.

Podemos citar como um exemplo dessa afirmação a Lógica Proposicional Clássica (que estudaremos mais a frente e) que fornece um estudo completo das inferências feitas apenas a partir da combinação de proposições com apenas dois valores: Verdeiro e Falso.

ARGUMENTOS E LÓGICA[3]

ARGUMENTOS

Uso: Argumentos são usados para

- Convencer
- Ser convencido
- Justificar
- Explicar [em especial, na Ciência, este é um de seus usos principais]
- Demonstrar

Exemplo de argumento:

Se a água está fervendo, então a água está 100 °C.
Ora, a água está fervendo.
Logo, a água está 100 °C.

Definição:

Em homenagem a Aristóteles, e apenas para iniciar nossa conversa, vamos propor a seguinte definição de argumento:

Argumento: discurso no interior do qual se extrai uma conclusão.

Em Aristóteles, encontramos: "O silogismo é um discurso argumentativo no qual, uma vez formuladas certas coisas [as premissas], alguma coisa distinta destas coisas [a conclusão] resulta necessariamente através delas pura e simplesmente" Tópicos I.1.100a 25, Analíticos Anteriores I.1.24b, Refutações Sofísticas 1.165a.1

LÓGICA E RETÓRICA

Em geral, diferenciamos dois tipos de argumento: aqueles em que as conclusões seguem necessariamente das premissas (estudaremos eles logo abaixo), estes são estudados na Lógica; e aqueles em que se tenta persuadir a aceitar a conclusão a partir das premissas (mas sem que a conclusão siga necessariamente das premissas), estes são estudados na Retórica (bem como a melhor forma de se dizer algo para se persuadir alguém). Assim, temos:

↗ Persuasivos → **Retórica** (Persuasão)

Argumentos

↘ Demonstrativos → **Lógica** (Demonstração

[3]Parte da discussão feita aqui, pode ser encontrada em PINTO, 2001, Cap. 1, e em NOLT, 1991, Cap. 1 e 2.

Argumentos Persuasivos (Exemplo[4])

Deus existe ou não existe. Se Deus existir e seguirmos seus mandamentos, seremos felizes pela eternidade; se Deus existir e não seguirmos seus mandamentos, seremos condenados eternamente. Logo, devemos aceitar que ele existe e seguir seus mandamentos.

Argumentos Demonstrativos (Análise)

Analisando o argumento inicial, temos 3 partes:

↱ Indicador de Premissa
↑ Se a água está fervendo, então a água está 100 °C. → Premissas
↳ Ora, a água está fervendo. ↗ Inferência válida
↓ → Inferência [latim:"inferre" = levar para]
Logo, a água está 100 °C. → Conclusão ↘ Inferência não-válida
↳ Indicador de Conclusão Argumento é uma falácia.

Indicadores de Inferência

Indicadores de inferência são termos usados para indicar inferências. Em geral, dividimo-los em indicadores de premissas e indicadores de conclusão.

Indicador de Premissas (exemplos):

ora	já que	desde que	supondo que	sabendo-se que	
pois	como	visto que	assumindo que	a razão é que	
dado que	porque	em vista de	admitindo que	como consequência de	etc.

Indicador de Conclusão (exemplos):

logo	daí	dessa maneira	segue-se que	o(a) qual acarreta que
portanto	de modo que	neste caso	assim sendo	o(a) qual implica que
assim	dessa forma	por conseguinte	consequentemente	o(a) qual significa que
então	de forma que	resulta que	o(a) qual prova que	podemos deduzir que
do(a) qual inferimos que		etc.		

Verdade e Validade

Existem vários tipos de frases: declarativa [ou apofântica] (que podem vir a ser verdadeiras); interrogativa (que expressam perguntas); exclamativa (que expressam uma exclamação); imperativa (que expressa uma ordem); e optativa (que expressa uma opção). Trataremos aqui apenas das frases declarativas que assumiremos ser verdadeiras (e usamos o signo V para designar que uma proposição se verdadeira) ou falsas (e usamos o signo F para designar que uma proposição é falsa). Assim, temos:

[4] Inspirado nos *Penseés* de Blaise Pascal.

↗ verdadeira (**V**)

Sentença Declarativa → Proposição ou

↘ falsa (**F**)

Vamos agora analisar as possibilidades da veracidade e falsidade das premissas e das conclusões em argumentos válidos.

Exemplo de argumento válido[5]:

[P1] Se a água está fervendo, então a água está 100 °C.

[P2] Ora, a água está fervendo.

[C] Logo, a água está 100 °C.

Por que é válido?

Porque da noção de se-então, não poderíamos ter[6]: Se A, então B; A e não B.

Temos então a seguinte tabela decorrente das análises dos casos possíveis a seguir.

Argumento válido

Casos	Premissas	Conclusão
[0.]	V	V
[3.]	~~V~~	~~F~~
[1.]	F	V
[2.]	F	F

Análise dos casos possíveis:

Lembremos que a lei "A água ferve se, e somente se, está a 100 °C" só é valida quando o lugar no qual se está fervendo a água está a pressão atmosférica de 1 atm; se a pressão for maior que 1 atm, então a água ferve acima de 100 °C; se a pressão for menor que 1 atm, então a água ferve abaixo de 100 °C. Levando isso em conta as situações abaixo são exemplo de cada um dos casos de veracidade e falsidade das premissas e conclusão descritos na tabela acima à direita.

0. Água fervendo a 1 atm (premissas verdadeiras) e a 100 °C (conclusão verdadeira).

1. Água sem ferver sem estar a 1 atm (premissas falsas) e a 100 °C (conclusão verdadeira)

2. Água sem ferver sem estar nem a 1 atm (premissas falsas) nem a 100 °C (conclusão falsa)

3. → **Há uma situação possível?**

[5] P1 e P2 indicam as premissas do argumento e C sua conclusão.

[6] Abaixo indicamos a forma do argumento ao lado com o uso dos signos A e B que representam quaisquer sentenças possíveis.

Não existe o caso 3 acima (a menos que a lei físico-química esteja errada, aí não é mais uma questão relativa à Lógica), pois se as premissas são verdadeiras, isto é se a água ferve à 100 °C e a água está fervendo, então a conclusão, a água está a 100 °C, não pode ser falsa (ou seja, como dissemos, se é verdadeiro "Se A, então B", então não podemos ter A e não B).

Esta é a então relação entre validade e verdade:

Em um argumento inferencialmente válido, se supomos que as premissas são verdadeiras, então, temos, necessariamente [necessidade lógica], que admitir que, nesse caso, sua conclusão será verdadeira.

ARGUMENTO VÁLIDO

Vamos então adotar então as seguintes definições:

Definição. Um argumento é **inferencialmente válido** se, e somente se, todas às vezes que suas premissas são verdadeiras, sua conclusão também o é.

Ou equivalentemente:

Definição bis. Um argumento é **inferencialmente válido** se não podemos ter suas premissas verdadeiras e sua conclusão falsa.

Convenção de Notação. Para abreviar, vamos chamar os argumentos inferencialmente válidos simplesmente de **argumentos válidos**.

Observemos mais uma vez que podemos ter argumentos válidos com premissas ou conclusões falsas (como no Caso 1 analisado na tabela acima).

ANTIGAMENTE...

Antigamente se fazia uma divisão da Lógica em estudo da dedução ou da indução. No estudo da dedução, estudávamos os casos em que deduzíamos casos particulares a partir de considerações gerais (por exemplo: desde que todo cisne é branco; resulta que os cisnes do zoológico são brancos); e no estudo da indução, estudávamos casos em que se passava de casos particulares para considerações gerais (por exemplo: como todos os cisnes que se viu até hoje são brancos; segue-se que todo cisne é branco). Assim, tínhamos:

	↗	Estudo da Dedução (Geral → Particular)
Divisão da Lógica		
	↘	Estudo da Indução (Particular → Geral)
		↑ nem sempre é valida

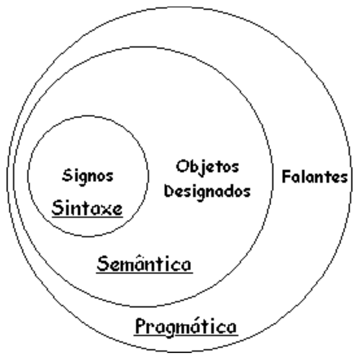
Faremos sobre essa divisão apenas duas observações.

(1) Nem sempre, na indução, a verdade da conclusão segue das verdades das premissas, i.e., nem sempre a indução é válida. Por exemplo, considere o argumento: dado que durante a minha vida toda, não aprendi matemática; podemos concluir que nunca vou aprender matemática. Esse argumento não é valido, pois, alguém pode não ter aprendido matemática até então, mas a partir de certo momento (por exemplo, tendo um bom professor) vir a aprender.

(2) Atualmente, uma das áreas do estudo da inferência é a Teoria da Inferência Estatística, que se usa o conceito de probabilidade. Mas, a Estatística e a Probabilidade são, em grande parte, teorias que usam da dedução (cf. NOLT, 1991, Capítulos 9 e 10).

Três Níveis de Análise do Discurso

No início deste curso, falamos sobre o uso de signos. Os signos podem ser estudados, pelo menos, em três níveis diferentes que designaremos por: Sintaxe, o estudo da relação dos signos entre si (sem considerar seus significados); Semântica, o estudo da relação dos signos com seus significados; e Pragmática, o estudo da relação entre os signos e os falantes que os usam. A figura a seguir representa a relação entre tais níveis e seus elementos.



Neste curso, para explicitar formas válidas de inferência através de signos, daremos ênfase aos aspectos sintáticos e trataremos do aspecto semântico apenas na medida que ele é necessário a essa explicitação. Não trataremos de forma específica do aspecto pragmático.

Exercício: Para os quatro argumentos a seguir: (1) Determine os indicadores de premissa e de conclusão do argumento. (2) Determine a(s) premissa(s) e a(s) conclusão(ões) do argumento. (3) Determine em que medida o argumento é persuasivo, indutivo ou demonstrativo; (4) Determine se o argumento é válido. (5) Dê pelo menos uma característica do argumento, em cada um dos níveis (sintático, semântico e pragmático).

(A) Desde que todo cisne é branco; resulta que os cisnes do zoológico são brancos

(B) Como todos os cisnes que se viu até hoje são brancos; segue-se que todo cisne é branco.

(C) Dado que durante a minha vida toda, não aprendi matemática; podemos concluir que nunca vou aprender matemática

(D) Deus existe ou não existe. Se Deus existir e seguirmos seus mandamentos, seremos felizes pela eternidade; se Deus existir e não seguirmos seus mandamentos, seremos condenados eternamente. Logo, devemos aceitar que ele existe e seguir seus mandamentos.

Teorias e a Lógica como Sistemas de Operações sobre Signos: Os Sistemas Formais

A Noção de Sistema Axiomático

Teorias axiomáticas ou *sistemas axiomáticos* servem à sistematização de uma área do conhecimento, como nas Ciências Contemporâneas, no qual necessitamos de deduções e demonstrações. Nessas teorias, as deduções e demonstrações sempre se apoiam em asserções anteriores e, então, devemos aceitar determinadas asserções como primeiras para não cairmos em um regresso infinito. Essas primeiras asserções, que aceitamos sem delas ter uma dedução, são chamadas, por definição, de *axiomas*.

Vamos então considerar uma teoria axiomática bem simples, com apenas dois axiomas, como a seguir, para exemplificar as noções que exporemos a seguir, relativas às teorias axiomáticas.

Axioma 1: Se o objeto considerado tem vida, então o objeto considerado é um organismo.
Axioma 2: Se o objeto considerado é um organismo, então o objeto considerado é complexo.

A Noção de Dedução em um Sistema Axiomático

Na teoria exposta no tópico anterior, podemos considerar a seguinte dedução:

Hipótese: O objeto considerado tem vida.
Axioma 1: Se o objeto considerado tem vida, então o objeto considerado é um organismo.
Conclusão Parcial: O objeto considerado é um organismo.
Axioma 2: Se o objeto considerado é um organismo, então o objeto considerado é complexo
Conclusão: O objeto considerado é complexo.

Então, em nossa teoria, da hipótese "*O objeto considerado tem vida*", podemos concluir que "*O objeto considerado é complexo*".

De forma geral, podemos dizer que a *dedução* de uma asserção (chamada, por definição, de *conclusão* da dedução) a partir de certas asserções (chamadas, por definição, de *hipóteses* da dedução) é, por definição, uma sequência de sentenças tal que cada sentença da sequência ou é uma hipótese ou é um axioma ou é inferida a partir das anteriores por *regras de inferência*.

Notemos que, na dedução acima, cada uma das cinco asserções da sequência acima ou é uma hipótese ou é um axioma ou é inferida a partir das anteriores por regras de inferência.

Abaixo temos, graficamente, as aplicações de regra de inferência.

Hipótese
Axioma 1
Conclusão parcial
Axioma 2
Conclusão

A regra de inferência aplicada na dedução acima é chamada de *Modus Ponens* e, se *X* e *Y* são duas sentenças, ela tem a forma:

X
Se X, então Y.
Y

Notemos então que, na dedução acima, a regra foi aplicada duas vezes: à Hipótese e ao Axioma 1, resultando a Conclusão parcial; e ao Axioma 2 e Conclusão parcial, resultando na conclusão final da dedução.

As Noções de Demonstração e Teorema em um Sistema Axiomático

Em uma teoria axiomática, temos ainda que, uma **demonstração** de uma asserção é, por definição, uma dedução, dessa mesma asserção, a partir apenas dos axiomas.

Podemos então considerar a seguinte demonstração em nossa teoria axiomática bem simples (notemos que não existem hipóteses):

Axioma 1: Se o objeto considerado tem vida, então o objeto considerado é um organismo.
Axioma 2: Se o objeto considerado é um organismo, então o objeto considerado é complexo.
Conclusão: Se o objeto considerado tem vida, então o objeto considerado é complexo.

A regra de inferência aplicada na dedução acima é chamada de *Silogismo Hipotético* e, se *X, Y* e Z são três sentenças, ela tem a forma:

Se X, então Y.
Se Y, então Z.
Logo, se X, então Z.

Asserções que são axiomas ou para as quais existe uma demonstração são chamadas, por definição, de *teoremas*.

Assim, a conclusão "*Se o objeto considerado tem vida, então o objeto considerado é complexo*" é então um teorema de nossa teoria, já que existe uma demostração para ela.

A Utilização de Signos em um Sistema Axiomático

Se usarmos o signo "→" para representar a noção de implicação e se usarmos letras "*A*", "*B*" e "*C*" para representar as sentenças conforme abaixo,

A – "O objeto considerado tem vida";
B – "O objeto considerado é um organismo";
C – "O objeto considerado é complexo";

podemos então, representar as sentenças abaixo como segue.

Se o objeto considerado tem vida, então o objeto considerado é um organismo: "A → B".

Se o objeto considerado é um organismo, então o objeto considerado é complexo: "B → C".

Se o objeto considerado tem vida, então o objeto considerado é complexo: "A → C".

Chamamos as sequências de signos "*A*", "*B*", "*C*", "*A → B*", "*B → C*" e "*A → C*" de *fórmulas*, analogamente às sentenças expressas por signos matemáticos.

Operações sobre Signos: Regras de Inferência e Dedução.

Usando então as convenções introduzidas acima, podemos expressar a primeira dedução, com a sequência de fórmulas abaixo.

Hipótese: A	[O objeto considerado tem vida.]
Axioma 1: A → B	[Se o objeto considerado tem vida, então o objeto considerado é um organismo.]
Conclusão parcial: B	[O objeto considerado é um organismo.]

Axioma 2: B → *C*	[Se o objeto considerado é um organismo, então o objeto considerado é complexo.]
Conclusão final: *C*	[O objeto considerado é complexo.]

Vimos que regras que nos permitem inferir fórmulas de outras fórmulas são chamadas de *regras de inferência*.

Em termos de fórmulas, temos o seguinte diagrama da aplicação das regras de inferência para essa dedução:

$$\begin{array}{c} A \\ A \to B \\ B \\ B \to C \\ C \end{array}$$

Notemos que ambas aplicações tem a forma:

$$\begin{array}{c} X \\ X \to Y \\ \hline Y \end{array}$$

Ora, essa é exatamente a formalização da regra de inferência *Modus Ponens*:

X
Se X, então Y.
Y

Notemos então que as regras de inferência, como a *Modus Ponens*, podem ser vistas como operações sobre signos, no sentido de que, por exemplo, a aplicação da regra às fórmulas "*A*" e "*A* → *B*" resulta a fórmula "*B*" e que a aplicação da regra às fórmulas *B*" e "*B* → *C*" resulta a fórmula "*C*".

Assim, é como se uma dedução resultasse de operações sobre signos (fórmulas) que podemos fazer para, a partir das hipóteses e axiomas, chegar à conclusão.

<u>OPERAÇÕES SOBRE SIGNOS: DEMONSTRAÇÃO.</u>

Podemos também expressar a demonstração feita anteriormente da seguinte forma.

Axioma 1: *A* → B	[Se o objeto considerado tem vida, então o objeto considerado é um organismo.]
Axioma 2: B → *C*	[Se o objeto considerado é um organismo, então o objeto considerado é complexo.]
Conclusão: *A* → *C*	[Se o objeto considerado tem vida, então o objeto considerado é complexo.]

Notemos que a regra de inferência que usamos para chegar a conclusão "*A* → *C*" a partir dos axiomas "*A* → *B*" e "*B* → *C*" é a regra de inferência *Silogismo Hipotético* e, assim, a forma da regra de inferência *Silogismo Hipotético* é:

$$\frac{\begin{array}{c} X \to Y \\ Y \to Z \end{array}}{X \to Z}$$

Podemos notar então como a dedução pode ser vista como o resultado de operações sobre signos (fórmulas) que podemos fazer para, a partir das hipóteses e axiomas, chegar à conclusão; e como também a demonstração pode ser considerada como o resultado de operações sobre signos (fórmulas) que podemos fazer para, a partir dos axiomas, chegar à conclusão.

Notemos também que uma demonstração pode ser vista como uma dedução sem hipóteses.

Podemos, pois, dispor dessas noções de deduções e demonstrações, enquanto operações sobre signos (fórmulas), visando usá-as na ciência, na formulação de teorias, a partir da criar linguagens artificiais precisas, tais que para construir um raciocínio correto, basta seguir regras sintáticas. O que faremos a seguir introduzindo a definição de sistema formal ou teria formal.

A Definição de Sistemas Formais e a Teoria BS

A partir do que expomos acima, podemos ver que, para realizar deduções e demonstrações em teorias formais, precisamos *apenas* de fórmulas (que expressarão axiomas e hipóteses) e de regras de inferência (que são operações sobre fórmulas). A constatação desse fato nos permite, então, introduzir a noção de sistema formal ou teoria formal, como faremos a seguir. Vamos introduzir, conjuntamente, um exemplo de teoria formal constituído a partir de nossa primeira teoria axiomática bem simples, que chamaremos **Teoria BS.**

Por definição, um **sistema formal** ou **teoria formal** se constitui, basicamente, do seguinte.

(1) Um conjunto de signos gráficos, chamado, por definição, de **alfabeto** do sistema formal; o alfabeto da Teoria *BS* são os signos: "*A*", "*B*", "*C*", "$\to$". Denominamos, por definição, de **expressão** qualquer sequência finita de signos do alfabeto.

(2) Um subconjunto do conjunto das expressões chamado, por definição, de **fórmulas** do sistema formal. As fórmulas da Teoria *BS* são as expressões: "*A*", "*B*", "*C*", "$A \to B$", "$B \to C$" e "$A \to C$". Será considerada a **linguagem** do sistema formal o alfabeto e o conjunto de fórmulas do sistema formal.

(3) Um subconjunto do conjunto de fórmulas chamado, por definição, de **axiomas** do sistema formal; a Teoria *BS* tem dois axiomas: as fórmulas "$A \to B$" e "$B \to C$".

(4) Por fim, um conjunto de **regras de inferência** que nos diz como passar de certas fórmulas a outras, em uma dedução; a Teoria *BS* tem duas regras de inferência: as regras *Modus Ponens* e *Silogismo Hipotético* descritas anteriormente.

O quadro a seguir resume o exposto:

<table>
<tr><th>Sistema Formal ou Teoria Formal</th><th colspan="2">Teoria BS</th></tr>
<tr><td>Constituintes</td><td colspan="2">Constituintes</td></tr>
<tr><td>(1) Alfabeto</td><td colspan="2">A B C $\to$</td></tr>
<tr><td>(2) Fórmulas</td><td colspan="2">A B C $A \to B$ $B \to C$ $A \to C$</td></tr>
<tr><td>(3) Axiomas</td><td colspan="2">$A \to B$ $B \to C$</td></tr>
<tr><td>(4) Regras de Inferência</td><td>Modus Ponens (MP):
$\dfrac{X \quad X \to Y}{Y}$</td><td>Silogismo Hipotético (SH):
$\dfrac{X \to Y \quad Y \to Z}{X \to Z}$</td></tr>
</table>

De posse das fórmulas, dos axiomas e das regras de inferência de nosso sistema formal *BS* podemos agora introduzir as noções de dedução, demonstração e teorema em um sistema formal. É o que faremos na próxima seção. Em especial, veremos como uma teoria formal ou sistema formal torna mais preciso os signos sobre os quais podemos fazer as operações (fórmulas) e as operações que podem ser realizadas sobre eles (regras de inferência).

As Noções de Correção e Completude de um Sistema Formal

Introduzida a noção de sistema formal axiomático, podemos agora introduzir as noções de correção e completude de um sistema formal axiomático, duas noções centrais em Lógica. Para tal, precisamos introduzir, de forma mais precisa, as noções de dedução, demonstração e teorema em um sistema formal discutidas na seção . É o que faremos a seguir.

A Noção de Dedução em Sistema Formal

Definição. Em um sistema formal, uma *dedução* de uma fórmula *X*, a partir de certas hipóteses, é uma sequência de fórmulas tal que:

(1) *X* é a última fórmula da sequência e

(2) cada uma das fórmulas da sequência:

(*a*) ou é uma hipótese;

(*b*) ou é um axioma;

(*c*) ou é inferida por regra de inferência a partir das anteriores.

Por exemplo, na Teoria *BS*, podemos então realizar a seguinte dedução, já feita anteriormente (notemos que as fórmulas da dedução são enumeradas e depois delas se escreve sua justificativa, ou seja, se ela é uma hipótese, um axioma, ou inferida das anteriores por regra de inferência, neste último caso, se insere a abreviação da regra de inferências e os números atribuídos às premissas da regra utilizada, *MP* é a abreviação utilizada para a regra *Modus Ponens*):

1. A – hipótese	[O objeto considerado tem vida.]
2. A → B – Axioma 1	[Se o objeto considerado tem vida, então o objeto considerado é um organismo.]
3. B – MP 1,2	[O objeto considerado é um organismo.]
4. B → C – Axioma 2	[Se o objeto considerado é um organismo, então o objeto considerado é complexo.]
5. C – MP 3,4	[O objeto considerado é complexo.]

Podemos ver que, da mesma forma que anteriormente, a dedução pode ser vista como o resultado de operações sobre signos (fórmulas) que podemos fazer para, a partir das hipóteses e axiomas, chegar até a conclusão, e como uma teoria formal ou sistema formal torna mais preciso os signos sobre os quais podemos fazer as operações (fórmulas) e as operações que podem ser realizadas sobre eles (regras de inferência).

As Noções de Demonstração e Teorema em um Sistema Formal

Definição. Em um sistema formal, uma *demonstração* de uma fórmula *X* é uma sequência de fórmulas tal que:

(1) *X* é a última fórmula da sequência e

(2) cada uma das fórmulas da sequência:

(*a*) ou é um axioma;

(*b*) ou é inferida por regra de inferência a partir das anteriores.

Notemos assim que, como anteriormente, uma demonstração pode ser vista como uma dedução sem hipóteses.

Temos então que, na Teoria *BS*, podemos realizar a demonstração, já feita anteriormente (notemos que, como na dedução, as fórmulas são enumeradas e depois delas se escreve sua justificativa, ou seja, se ela é um axioma ou inferida das anteriores por regra de inferência, *SH* é a abreviação para a regra *Silogismo Hipotético*):

1. $A \rightarrow B$ – Axioma 1	[Se o objeto considerado tem vida, então o objeto considerado é um organismo.]
2. $B \rightarrow C$ – Axioma 2	[Se o objeto considerado é um organismo, então o objeto considerado é complexo.]
3. $A \rightarrow C$ – SH 1,2	[Se o objeto considerado tem vida, então o objeto considerado é complexo.]

Definição. Fórmulas que são axiomas ou para as quais existe uma demonstração são chamadas, por definição, de *teoremas*.

Notemos assim que, como existe uma demonstração da fórmula "$A \rightarrow C$" na Teoria *BS*, a fórmula "$A \rightarrow C$" é uma teorema da Teoria *BS*.

Podemos ver que, da mesma forma que a dedução no tópico anterior, a demonstração também pode ser vista como o resultado de operações (regras de inferência) sobre signos (fórmulas) que podemos fazer para, a partir dos axiomas, chegar até a conclusão, e como, devido a isso, uma teoria formal ou sistema formal torna mais preciso o sentido das noções de dedução, demonstração e de teorema. Mais ainda, tais definições rigorosas e exatas, elaboradas sobre uma linguagem artificial precisa, permitem estabelecer quais são os raciocínios corretos (nessa linguagem) apenas a partir de regras sintática (sobre signos), possibilitando sua aplicação, em uma ciência cuja teoria possa ser escrita nessa linguagem, para uma explicação rigorosa. Tal delimitação dos raciocínios corretos (na linguagem artificial) nos leva aos conceitos de correção e completude (inclusive inferências), como veremos nas seções seguintes.

AS NOÇÕES DE CORREÇÃO E COMPLETUDE DE UM SISTEMA FORMAL

Vemos, então, como, a partir do surgimento da noção de sistema formal (que pode ser usada tanto em formas clássicas de raciocínio, como fizeram Frege e Russel, em relação à Lógica Clássica, quanto em relação às formas não-clássicas, como nas lógicas não-clássicas), temos que o estudo das deduções e demonstrações se torna então um estudo das operações sobre signos, no qual as deduções e demonstrações podem ser representadas de forma mais precisa.

Em especial, uma teoria formal ou sistema formal torna mais preciso os signos sobre os quais podemos fazer as operações (fórmulas) e as operações que podem ser realizadas sobre eles (regras de inferência). Em especial, teoremas são fórmulas que resultam de sucessivas aplicações de regras de inferência, a partir dos axiomas, em uma demonstração.

A partir disso, cabe então as seguintes perguntas.

(1) Todos os teoremas da teoria são verdades? Ou ainda, demonstra-se todas as verdades?

(2) Todas as verdades são teoremas? Ou ainda, todas as verdades são demonstráveis?

Representando graficamente as questões acima temos:

$$\text{Teoremas} \quad \begin{array}{c} 1 \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ 2 \end{array} \quad \text{Verdades}$$

Essas questões nos levam então as noções de correção e completude de um sistema formal. Ficamos então com as seguintes definições.

Definição. Uma teoria é *correta* se todos os seus teoremas são verdades.

Definição. Uma teoria é *completa* se todas as verdades são teoremas.

Temos então que, na representação gráfica acima, a Seta 1 indica a correção do sistema formal e a Seta 2 indica a completude do sistema formal, como representado abaixo.

$$\text{Verdades} \quad \begin{array}{c} \text{Correção} \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \text{Completude} \end{array} \quad \text{Teoremas}$$

As Noções de Correção e Completude da Teoria BS

Consideremos agora as noções de correção e de completude em relação a Teoria *BS*.

Vamos aqui usar uma noção intuitiva de verdade para as fórmulas. Notemos então que estamos considerando que as fórmulas "$A \rightarrow B$", "$B \rightarrow C$" e "$A \rightarrow C$" da Teoria *BS* são sempre verdadeiras, mas que nem sempre são verdadeiras as fórmulas "A", "B", "C", já que, por exemplo, o objeto considerado pode não ter vida (ou seja "A" não é verdadeira sempre).

Ou seja, estamos considerando o seguinte.

Verdades: "$A \rightarrow B$", "$B \rightarrow C$" e "$A \rightarrow C$".

Outras fórmulas: "A", "B", "C".

Por outro lado, podemos nos perguntar quais fórmulas são teoremas de nossa Teoria *BS*. Vimos que, por definição, *teoremas* são sentenças que são axiomas ou para as quais existe uma demonstração. Assim, em nossa Teoria *BS*, são teoremas as fórmulas "$A \rightarrow B$" (Axioma 1), "$B \rightarrow C$" (Axioma 2) e "$A \rightarrow C$" (pois existe uma demonstração, como vimos no Tópico 12).

Ou seja, temos o seguinte.

Teoremas da Teoria *BS*: "$A \rightarrow B$", "$B \rightarrow C$" e "$A \rightarrow C$".

Não-teoremas de *BS*: "A", "B", "C".

Ou seja, temos assim que, em nossa Teoria *BS*, todos os teoremas são verdades; logo a Teoria *BS* é correta.

Da mesma forma, todas as verdades são teoremas da Teoria *BS*; logo a Teoria *BS* é completa.

Ou seja, *o nosso sistema formal BS é correto e completo*, já que, nele, verdades o os teoremas coincidem.

As Noções de Correção e Completude Inferenciais de um Sistema Formal

(II) Podemos ainda estudar a relação entre as deduções e as inferências válidas em um sistema formal, buscando responder às seguintes questões.

(1) Será que toda dedução é uma inferência válida?

(2) Será que para toda inferência válida existe uma dedução dela no sistema formal?

Representando graficamente as questões acima temos:

$$\text{Deduções} \quad \begin{array}{c} \scriptstyle 1 \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \scriptstyle 2 \end{array} \quad \text{Inferências Válidas}$$

Temos então as seguintes definições.

Definição. Uma teoria é *correta inferencialmente* se toda dedução constitui uma inferência válida.

Definição. Uma teoria é *completa inferencialmente* se para toda inferência válida existe uma dedução para ela na teoria.

Temos então que, nas representações gráficas acima, as setas 1 indicam a correção inferencial do sistema formal e as setas 2 indicam a completude inferencial do sistema formal, como expresso nas representações gráficas abaixo.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Completude Inferencial} & \\ \text{Deduções} & \rightarrow & \text{Inferências} \\ \text{na Teoria Formal} & \leftarrow & \text{Válidas} \\ & \text{Completude Inferencial} & \end{array}$$

Correção e Completude Inferenciais da Teoria BS

Mostremos então que a Teoria *BS* é correta inferencialmente. Para isso, precisamos mostrar que toda dedução em *BS* é válida.

Com efeito, notemos que a regra de inferência *Modus Pones* é de tal forma que, se admitirmos que suas premissas $X \rightarrow Y$ e X são verdadeiras, temos que admitir que sua conclusão Y também é verdadeira. Temos também que a regra de inferência *Silogismo Hipotético* é de tal forma que, se admitirmos que suas premissas $X \rightarrow Y$ e $Y \rightarrow Z$ são verdadeiras, temos que admitir que sua conclusão $Y \rightarrow Z$ também é verdadeira. Assim, como, nas deduções da Teoria *BS*, apenas usamos as regras de inferência *Modus Ponens* e *Silogismo Hipotético*, então, se admitirmos que as premissas (hipóteses) das deduções são verdadeiras, temos que admitir todas as conclusões (parciais ou final) são verdadeiras. Logo, toda dedução em *BS* é válida.

Podemos então concluir que a Teoria *BS* é correta inferencialmente.

A completude inferencial da Teoria *BS* irá depender da noção de implicação adotada. Pode-se mostrar que existe uma noção de implicação para a qual a Teoria *BS* é completa inferencialmente.

Exercício. Para cada argumento formal a seguir (a fórmula acima do traço é a premissa e a fórmula abaixo do traço é a conclusão), encontre uma dedução no sistema BS (no caso (3), encontre uma dedução diferente da realizada anteriormente).

(1) $\dfrac{A}{B}$ (2) $\dfrac{B}{C}$ (3)* $\dfrac{A}{C}$

QUADRO RESUMO – CORREÇÃO E COMPLETUDE

<table>
<tr><td colspan="5">SINTAXE*</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="5">Teoria Formal ou Sistema Formal **</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>(1) Alfabeto</td><td>(2) Fórmulas</td><td>(3) Axiomas</td><td colspan="2">(4) Regras de Inferência</td><td colspan="2">SEMÂNTICA*</td></tr>
<tr><td>Demonstração</td><td>Axiomas</td><td>Regras de
⟶
Inferência</td><td colspan="2">(Demais) Teoremas</td><td>Correção
→
←
Completude</td><td>Verdades</td></tr>
<tr><td>Dedução</td><td>Premissas
(+ Axiomas)</td><td>Regras de
⟶
Inferência</td><td colspan="2">Conclusão</td><td>Correção Inferencial
→
←
Completude Inferencial</td><td>Inferência Válida</td></tr>
</table>

* As noções de sintaxe e semântica aqui adotadas são aquelas já citadas anteriormente.
** Notemos que este diagrama também vale para as teorias axiomáticas não formalizadas.

Conectivos Clássicos e suas Regras de Inferência

Vimos como a noção de teoria formal ou sistema formal nos permite tornar mais precisas as noções de dedução, demonstração e teorema, e representar (sintaticamente), em termos de operações (regras de inferência) sobre signos (fórmulas), as inferências (semânticas) válidas.

Entretanto, a linguagem formal introduzida até aqui é muito pobre, pois tem apenas um signo para expressar as relações entre proposições: a implicação "$\rightarrow$".

Vamos agora enriquecer nossa linguagem formal e introduzir novos signos para expressar relações entre proposições; tais signos são chamados **conectivos**.

Segue abaixo os novos conectivos, com seus sentidos intuitivos, e as regras de inferência que os definem sintaticamente.

Conectivo	**Signo**	**Exemplo**	**Sentido**
Conjunção	$\wedge$	$A \wedge B$	Ocorre A e ocorre B
Disjunção	$\vee$	$A \vee B$	Ocorre A ou ocorre B ou ocorre ambos
Negação	~	~A	Não ocorre A
Bicondicional	$\leftrightarrow$	$A \leftrightarrow B$	Ocorre A se, e somente se, ocorre B
Condicional	$\rightarrow$	$A \rightarrow B$	Se ocorre A, então ocorre B

Regras de Inferência

Simplificação (S)

$$\begin{array}{c} X \wedge Y \\ \hline X \end{array} \qquad \begin{array}{c} X \wedge Y \\ \hline Y \end{array}$$

Conjunção (C)

$$\begin{array}{c} X \\ Y \\ \hline X \wedge Y \end{array} \qquad \begin{array}{c} Y \\ X \\ \hline X \wedge Y \end{array}$$

Adição (A)

$$\begin{array}{c} X \\ \hline X \vee Y \end{array} \qquad \begin{array}{c} Y \\ \hline X \vee Y \end{array}$$

Dupla Negação (DN)

$$\begin{array}{c} \sim\sim X \\ \hline X \end{array} \qquad \begin{array}{c} X \\ \hline \sim\sim X \end{array}$$

Silogismo Disjuntivo (SD)

$$\begin{array}{c} X \vee Y \\ \sim X \\ \hline Y \end{array} \qquad \begin{array}{c} X \vee Y \\ \sim Y \\ \hline X \end{array}$$

Condicional para Bicondicional (CB)

$$\begin{array}{c} X \rightarrow Y \\ Y \rightarrow X \\ \hline X \leftrightarrow Y \end{array}$$

Bicondicional para Condicional (BC)

$$\begin{array}{c} X \leftrightarrow Y \\ \hline X \rightarrow Y \end{array} \qquad \begin{array}{c} X \leftrightarrow Y \\ \hline Y \rightarrow X \end{array}$$

Redução ao Absurdo (RA)

$$\begin{array}{c} X \rightarrow Y \\ X \rightarrow \sim Y \\ \hline \sim X \end{array}$$

Modus Ponens (MP)

$$\begin{array}{c} X \rightarrow Y \\ X \\ \hline Y \end{array}$$

Silogismos Hipotético (SH)

$$\begin{array}{c} X \rightarrow Y \\ Y \rightarrow Z \\ \hline X \rightarrow Z \end{array}$$

Vejamos agora um exemplo de dedução com essas regras de inferência.

Exemplo. Encontre uma dedução para o argumento abaixo.

$$\begin{array}{c} \sim A \\ A \vee B \\ B \rightarrow C \\ \hline C \end{array}$$

1. ~A Premissa
2. $A \vee B$ Premissa
3. $B \rightarrow C$ Premissa
4. B SD 1,2
5. C MP 3,4

Exercício: Reescreva o argumento e a dedução acima considerando a convenção abaixo.

A – É noite

B – É dia

C – O Sol está no Céu

Neste caso, temos o seguinte.

Argumento:

Não é noite
É noite ou é dia
Se é dia, então o Sol está no Céu
Logo, o Sol está no Céu

Dedução:

1. Não é noite – Premissa
2. É noite ou é dia – Premissa
3. Se é dia, então o Sol está no Céu – Premissa
4. É dia – SD 1,2
5. O Sol está no Céu – MP 3,4

Exercício: Encontre uma dedução para cada um dos argumentos abaixo.

(1)
A
$A \rightarrow B$
―――――
$A \wedge B$

(2)
A
B
$(A \wedge B) \rightarrow C$
―――――
C

(3)
A
$A \rightarrow (B \wedge C)$
―――――
B

(4)
A
$A \rightarrow {\sim}{\sim}B$
―――――
B

(5)
$(A \vee B) \rightarrow C$
B
―――――
C

(6)
A
$A \leftrightarrow B$
―――――
B

(7)
$A \wedge (A \rightarrow B)$
―――――
B

(8)
A
$A \rightarrow B$
$B \rightarrow C$
―――――
$A \wedge B \wedge C$

(9)
$A \rightarrow B$
$B \rightarrow C$
$C \rightarrow A$
―――――
$A \leftrightarrow B$

(10)
$A \rightarrow B$
$B \rightarrow C$
$A \rightarrow {\sim}C$
―――――
${\sim}A$

(11)
A
${\sim}A$
―――――
B

(12)
A
$(A \vee B) \rightarrow C$
${\sim}D$
$D \vee E$
$(C \wedge E) \rightarrow F$
$F \rightarrow (G \wedge {\sim}{\sim}H)$
―――――
H

Resolução.

(1)
1. A Premissa
2. $A \rightarrow B$ Premissa
3. B MP 1,2
4. $A \wedge B$ C 1,3

(2)
1. A Premissa
2. B Premissa
3. $(A \wedge B) \rightarrow C$ Premissa
4. $A \wedge B$ C 1,2
5. C MP 3, 4

(3)
1. A Premissa
2. $A \rightarrow (B \wedge C)$ Premissa
3. $B \wedge C$ MP 1, 2
4. B S 3

(4)
1. A Premissa
2. $A \rightarrow {\sim}{\sim}B$ Premissa
3. ${\sim}{\sim}B$ MP 1,2
4. B DN 3

(5)
1. $(A \vee B) \rightarrow C$ Premissa
2. B Premissa
3. $A \vee B$ A 1
4. C MP 1, 3

(6)
1. A Premissa
2. $A \leftrightarrow B$ Premissa
3. $A \rightarrow B$ BC 2
4. B MP 1,3

(7)
1. $A \wedge (A \rightarrow B)$ Premissa
2. A S 1
3. $A \rightarrow B$ S1
4. B MP 2,3

(8)
1. A Premissa
2. $A \rightarrow B$ Premissa
3. $B \rightarrow C$ Premissa
4. B MP 1,2
5. C MP 3,4
6. $A \wedge B$ C 1,4
7. $(A \wedge B) \wedge C$ C 5,6

(9)
1. $A \rightarrow B$ Premissa
2. $B \rightarrow C$ Premissa
3. $C \rightarrow A$ Premissa
4. $B \rightarrow A$ SH 2,3
5. $A \leftrightarrow B$ CB 1,4

(10)
1. $A \rightarrow B$ Premissa
2. $B \rightarrow C$ Premissa
3. $A \rightarrow {\sim}C$ Premissa
4. $A \rightarrow C$ SH 1,2
5. ${\sim}A$ RA 3,4

(11)
1. A Premissa
2. ${\sim}A$ Premissa
3. $A \vee B$ A 1,2
4. B SD 2,3

(12)
1. A Premissa
2. $A \vee B$ A1
3. $(A \vee B) \rightarrow C$ Premissa
4. C MP 2,3
5. ${\sim}D$ Premissa
6. $D \vee E$ Premissa
7. E SH 5,6
8. $C \wedge E$ C 4,7
9. $(C \wedge E) \rightarrow F$ Premissa
10. F MP 8,9
11. $F \rightarrow (G \wedge {\sim\sim}H)$ Premissa
12. $G \wedge {\sim\sim}H$ MP 10,11
13. ${\sim\sim}H$ S 12
14. H DN 13

Os conectivos aqui introduzidos

$$\wedge \; \vee \; {\sim} \; \leftrightarrow \; \rightarrow$$

mais as letras que denotam sentenças

$$A, B, C, \ldots, X, Y, W, Z$$

e os signos de parênteses

$$(\;)$$

formam **todo** o alfabeto da linguagem que utilizaremos nas próximas aulas.

Existem outros conectivos que podem ser definidos na Lógica Proposicional Clássica, como, por exemplo, o conectivo disjunção exclusiva $\vee\vee$ tal que $A\vee\vee B$ tem o sentido: ou A ocorre, ou B ocorre, mas não ambos. Entretanto, todos os conectivos da Lógica Proposicional Clássica podem ser definidos a partir de combinações dos conectivos introduzidos acima; por exemplo, a disjunção exclusiva pode ser definida como $A\vee\vee B :=_{def.} (A\vee B)\wedge{\sim}(A\wedge B)$ (que, justamente, pode ser lido como: A ocorre ou B ocorre, mas não ambos).

A DEMONSTRAÇÃO CONDICIONAL E OS SISTEMAS DE DEDUÇÃO NATURAL

Considere que se queira encontrar uma dedução para o seguinte argumento válido:

$$\frac{\begin{array}{c} A \to (B \to C) \\ B \end{array}}{A \to C}$$

Notemos então que este argumento não pode ser deduzido com as regras de inferências vistas até agora, pois, como a primeira premissa tem o conectivo "implicação", só poderíamos aplicar nela as regras de inferência, MP, SH e CB; mas nenhuma dessas podem ser aplicadas às premissas $A \to (B \to C)$ e B acima.

Por outro lado, consideremos que podemos trabalhar com hipóteses, por exemplo, A. Chamaremos esta regra de **Demonstração Condicional (DC)**. Neste caso temos:

1. $A \to (B \to C)$ Premissa
2. B Premissa
3. | A Hipótese (Usamos uma linha vertical na frente para denotar que se está sob uma hipótese.)
4. | $B \to C$ MP 1,3
5. | C MP 2,4
6. $A \to C$ DC 3-5

Notemos que então que, na aplicação da regra de Demonstração Condicional, retiramos a linha vertical e a hipótese é considerada uma condição da conclusão e escrevemos sua abreviação DC seguida da indicação do intervalo em que se estava sob a hipótese inicial.

Vejamos outro exemplo. Encontrar uma dedução para o argumento válido abaixo.

$$\frac{A \vee B}{\sim A \to B}$$

1. $A \vee B$ Premissa
2. | ~A Hipótese
3. | B SD 1,2
4. $\sim A \to B$ DC 2-3

Notemos por fim que podemos usar quantas hipóteses quisermos, desde que mantenhamos a ordem correta em relação às premissas. Como no seguinte exemplo de dedução para o argumento abaixo.

$$\frac{A \to (B \to C)}{B \to (A \to C)}$$

1. $A \to (B \to C)$ Premissa

2. | B Hipótese
3. | | A Hipótese (notemos a segunda linha, pois temos uma segunda hipótese)
4. | | $B \rightarrow C$ MP 1,3
5. | | C MP 2,4
6. | $A \rightarrow C$ DC 3-5
7. $B \rightarrow (A \rightarrow C)$ DC 2-6

Exercício. Encontre uma dedução para os seguintes argumentos.

(1)
$$\frac{A}{B \rightarrow (A \wedge B)}$$

(2)
$$\frac{A \rightarrow B \quad A \rightarrow C}{A \rightarrow (B \wedge C)}$$

(3)
$$\frac{A \rightarrow C \quad B \rightarrow D}{A \rightarrow (B \rightarrow (C \wedge D))}$$

Notemos que, com a Demonstração Condicional, podemos fazer uma demonstração de uma fórmula (isto é, uma dedução sem premissas), como nos exemplos abaixo (isso aliás que justifica o termo "Demonstração" no nome da regra).

1. | A Hipótese
2. | $A \vee B$ A 1
3. $A \rightarrow (A \vee B)$ DC 1-2

1. | A Hipótese
2. | | B Hipótese
3. | | $A \wedge B$ C 1,2
4. | $B \rightarrow (A \wedge B)$ DC 2-3
5. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$ DC 1-4

Assim $B \rightarrow (A \vee B)$ e $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$ são teoremas de nosso sistema de regras de inferências.

As regras de inferências apresentadas anteriormente mais a regra de Demonstração Condicional formam o que se chama de um sistema de dedução natural. A Dedução Natural é um método de demonstração introduzido, independentemente, nos anos 30, por Gerhard Karl Erich Gentzen (1909-1945) e Stanisław Jaśkowski (1906-1965). Os sistemas de dedução natural são sistemas dedutivos que não apresentam axiomas, apenas regras de inferência e que, como o próprio nome diz, possibilitam realizar deduções e demonstrações formais em Lógica de modo o mais natural possível.

Exercício. Encontre uma demonstração para as fórmulas abaixo.

(1) $(A \wedge B) \rightarrow A$

(2) $\sim\sim A \rightarrow A$

(3) $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

(4) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A)$

(5) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (*usar repetição da hipótese)

(6)$(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$

CONECTIVOS E TABELAS-VERDADE

Nas aulas anteriores, inserimos os conectivos lógicos e os sentidos a eles atribuídos (conforme a tabela abaixo) e, a partir destes, introduzimos regras de inferência que nos permitiram fazer deduções e demonstrações.

Conectivo	Fórmula	Sentido
Conjunção	$A \wedge B$	Ocorre A e ocorre B
Disjunção	$A \vee B$	Ocorre A ou ocorre B ou ocorre ambos
Negação	$\sim A$	Não ocorre A
Bicondicional	$A \leftrightarrow B$	Ocorre A se, e somente se, ocorre B
Condicional	$A \rightarrow B$	Se ocorre A, então ocorre B

Se usarmos a letra "V" de "Verdadeiro" ou a letra "F" de "Falso" para denotar que, respectivamente, uma proposição ocorre ou não ocorre, então podemos nos perguntar:

Será que podemos expressar o sentido dos conectivos em termos de V ou F?

É a resposta a essa questão que estudaremos agora.

Considere então que o seguinte significado da sentença "A":

A – A alma é imortal

Temos então duas possibilidades:

Situação	A alma é imortal
(1)	V
(2)	F

Ou seja:

(1) A alma é imortal

(2) A alma não é imortal

Considere então:

~A – A alma não é imortal

Exercício. Preencha com V ou F a seguinte tabela.

A	**~A**
V	
F	

Considere, agora, os seguintes significados das sentenças "A" e "B":

A – A alma é imortal

B – O pensamento é poderoso

Temos então quatro casos possíveis:

Situação	A alma é imortal	O pensamento é poderoso
(1)	V	V
(2)	V	F
(3)	F	V
(4)	F	F

Ou seja:

(1) A alma é imortal e o pensamento é poderoso

(2) A alma é imortal e o pensamento não é poderoso

(3) A alma não é imortal e o pensamento é poderoso

(4) A alma não é imortal e o pensamento não é poderoso

Considere então:

$A \wedge B$ – A alma é imortal e o pensamento é poderoso

$A \vee B$ – A alma é imortal ou o pensamento é poderoso

Exercício. Preencha com V ou F as seguintes tabelas.

A	B	$A \wedge B$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

A	B	$A \vee B$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Notemos que:

(1) A conjunção só é verdadeira quando ambas são verdadeiras.

(2) Basta que uma seja falsa para a conjunção ser falsa.

E que:

(1) A disjunção só é falsa quando ambas são falsas.

(2) Basta que uma seja verdadeira para a disjunção ser verdadeira.

Definição. Os valores V e F atribuídos as proposições são chamados de **valores-verdade** e as tabelas que expressam o sentido das fórmulas em termos de valores-verdade são chamadas **tabelas-verdade**.

Notemos então que podemos fazer a tabela-verdade de uma fórmula complexa, a partir do resultado de cada um dos conectivos, definido pelas tabelas-verdades acima, como no exercício abaixo.

Exercício. Complete a tabela-verdade a seguir.

A	B	$A \wedge B$	$\sim(A \wedge B)$	$\sim A$	$\sim A \vee B$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Vimos que os sentidos da negação, da conjunção e da disjunção podem ser expresso em termos de tabela-verdade. Podemos então nos perguntar: Será que podemos propor um sentido para a implicação apenas em termos da tabela-verdade?

A resposta é: Sim!

Vejamos como.

A idéia geral de $A \rightarrow B$ é: se temos A, temos necessariamente B.

Ou de outra forma: não é possível ocorrer A e não ocorrer B.

Tornar preciso essa noção de "necessariamente" ou de "possível" é complicado. Assim, se encontrarmos uma noção de implicação apenas em termos de uma tabela-verdade, seria bem mais simples para se criar uma conceitografia[7].

Notemos então a equivalência entre as asserções:

Se chove, então a rua estão molhada ≈ Não chove ou a rua está molhada

Ou seja, idéia é interpretar "$A \rightarrow B$" como: não ocorre A ou ocorre B.

Neste caso, se supomos que "A" e que "$A \rightarrow B$", podemos concluir "B".

Com efeito, se $A \rightarrow B$, então, por definição, não ocorre A ou ocorre B; se ocorre A, então B tem que ocorrer B necessariamente.

Para dar um exemplo, consideremos, novamente:

A – A alma é imortal

B – O pensamento é poderoso

Temos então que:

$A \rightarrow B$ – A alma não é imortal ou o pensamento é poderoso

Mostremos que de A e $A \rightarrow B$ podemos concluir B.

(1) A: A alma é imortal.

(2) $A \rightarrow B$: A alma não é imortal ou o pensamento é poderoso.

Logo, de (1) e (2), podemos concluir B: o pensamento é poderoso.

Ou seja, iremos considerar $A \rightarrow B$ como: não ocorre A ou ocorre B.

Notemos então que o sentido de $A \rightarrow B$ pode ser expresso pela fórmula $\sim A \vee B$.

Exercício. Complete a tabela-verdade abaixo (considere que $A \rightarrow B$ tem o mesmo sentido de que $\sim A \vee B$; veja exercício anterior).

[7]Veja sobre a noção de Conceitografia na Introdução.

A	B	$A \rightarrow B$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Notar que:

(1) $A \rightarrow B$ é falsa se, e somente se, A é verdadeira e B é falsa.

(2) Se A é falsa, então $A \rightarrow B$ é verdadeira.

(3) Se B é verdadeira, então $A \rightarrow B$ é verdadeira.

Notemos então que "$A \rightarrow B$" também denota que não ocorre, simultaneamente, A e não-B, ou seja, $\sim(A \wedge \sim B)$.

Exercício. Faça a tabela-verdade de $\sim(A \wedge \sim B)$ e veja que ela é igual a tabela-verdade de $\sim A \vee B$.

Por fim, podemos propor a definição abaixo para indicar o que discutimos acima.

Definição. Usaremos o termo <u>condicional</u> para designar a implicação definida pelas tabelas-verdade logo acima.

Assim, para salientar que $A \rightarrow B$, em termos das tabelas-verdades acima, podemos ler esta fórmula como "A condicional B" ao invés de lê-la simplesmente como "A implica B".

Notemos ainda que é util introduzir a seguinte nomenclatura.

Definição: Considere uma sentença da forma $X \rightarrow Y$. A sentença que se encontra antes do conectivo $\rightarrow$ (no caso, "X") é chamada de <u>antecedente</u> da implicação e a sentença que se encontra depois do conectivo $\rightarrow$ (no caso, "Y") é chamada de <u>conseqüente</u> da implicação.

Para terminar a exposição dos conectivos em termos de tabelas-verdade, temos que o sentido do bicondicional também pode ser escrito em termos de uma tabela-verdade.

Complete então com V e F a tabela-verdade abaixo.

A	B	$A \leftrightarrow B$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Notar que: $A \leftrightarrow B$ é verdadeira se, e somente se, A e B têm o mesmo valor-verdade.

De posse dessas definições, podemos usar as tabelas-verdades para encontrar fórmulas que são sempre verdadeiras (bem como, encontrar as fórmulas que serão sempre falsas). O que motiva a seguinte definição.

Definição. Uma fórmula que é sempre verdadeira é chamada de **tautologia**; uma fórmula que é sempre falsa é chamada de **contradição**; uma fórmula que nem é tautologia nem é contradição é chamada de **contingência**.

Exemplo. Vamos fazer a tabela-verdade das fórmulas abaixo e classificá-las em tautologia, contradição e contingência. Notemos que, em um exercício anterior, fizemos as tabelas-verdade de fórmulas complexas, construindo primeiro as tabelas-verdade das formulas que as compunham. Aqui, vamos usar um outro método: usaremos apenas uma tabela-verdade para cada fórmula e escreveremos, debaixo de cada letra e da cada conectivo da fórmula, o seu resultado para em cada linha (os números abaixo da tabela-verdade indicam a ordem de seu preenchimento).

(1) $A \vee \sim A$

A	A	∨	~	A
V	V	V	F	V
F	F	V	V	F
	1	4	3	2

Tautologia

(2) $\sim\sim A \leftrightarrow A$

A	A	↔	~	A
V	V	F	F	V
F	F	F	V	F
	1	4	3	2

Contradição

(3) $A \rightarrow (A \vee B)$

A	B	A	→	(A	∨	B)
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F
F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	F	F	F
		1	5	2	4	3

Tautologia

(4) $(A \vee B) \rightarrow A$

A	B	(A	∨	B)	→	A
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	F
F	F	F	F	F	V	F
		1	4	3	5	2

Contingência

Exercício. Classifique as fórmulas abaixo em tautologia, contradição e contingência.

(1) $A \wedge \sim A$ (2) $\sim(A \wedge \sim A)$ (3) $A \rightarrow A$ (4) $\sim A \leftrightarrow A$

(5) $(A \wedge B) \rightarrow A$ (6) $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ (7) $((A \rightarrow B) \wedge \sim B) \rightarrow \sim A$ (8) $((A \vee B) \wedge \sim A) \rightarrow B$

A Implicação Material e seus Paradoxos

A implicação descrita apenas pelo conectivo condicional é chamada de implicação material e, como vimos, descreve a implicação *apenas em termos dos valores-verdade de seus constituintes*.

Nesse sentido, temos que, se considerarmos a sentença

A Lua é de queijo → 1=1

temos que essa sentença é verdadeira, pois, neste caso, tanto seu antecedente é falso, quanto seu conseqüente é verdadeiro.

A condicional é a forma com que Frege introduz a implicação em sua Conceitografia (cf., por exemplo, Frege, 2009, p.74).

Podemos notar, como faz Frege (idem, p. 75), que "A linguagem corrente não permite que se traduza esse sinal em todos os casos por 'se[... então _]'." Sem dúvida, neste caso, parece-nos estranha a sentença:

Se a Lua é de queijo, então 1=1.

As sentenças que contém implicações materiais e que parecem contradizer a noção intuitiva de implicação expressa por "se ... então _" são chamadas de Paradoxos da Implicação Material.

Podemos nos perguntar: para que usar uma forma de implicação que nos causa estranhamento ao traduzi-la em termos de "se ... então _"?

Como vimos, porque, ela simplifica o tratamento da implicação do ponto de vista de uma conceitografia, bem como de sua interpretação, na medida em que:

(1) o valor-verdade da fórmula composta A→B é determinado apenas pelos valores-verdade de A e de B, sem que se precise considerar qualquer outro dado; e

(2) evita as dificuldades naturais em se tentar caracterizar o que seria a noção mais complexa de implicação.

Existe um ramo da Lógica, chamado de Lógica da Relevância, que estuda sistemas formais com uma noção de implicação que evitam os paradoxos da implicação material (cf. a seção Lógica da Relevância mais adiante). Entretanto esses sistemas formais inserem maiores complicações do que a conceitografia que está sendo aqui proposta, e, em geral, por causa disso, usamos a lógica aqui apresentada para o próprio estudo da Lógica da Relevância.

Por fim, notemos que mesmo que estranhemos a definição de implicação em termos da implicação material, esse estranhamento deixa de existir se entendermos que essa implicação, da forma A→B, é definida por: não ocorre A ou ocorre B. Assim, a sentença

"A Lua é de queijo → 1=1"

expressa:

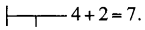
A Lua não é de queijo ou 1=1.

E essa sentença é verdadeira, pois é a disjunção de duas sentenças verdadeira, pois tanto a Lua não é de queijo quanto 1=1.

A CONCEITOGRAFIA DE FREGE

As páginas abaixo mostram uma das formas com que Frege (2009, p.73-75) introduz sua Conceitografia.

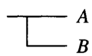
No entanto, com isto ainda não se asseriu que essa equação[23] é falsa. Formou-se apenas um novo conteúdo asserível que, só após o acréscimo do traço de juízo, torna-se o juízo "4 + 2 não é igual a 7":



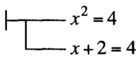
Quando se quer relacionar dois conteúdos asseríveis[24], *A* e *B*, devem-se considerar os seguintes casos:

1) *A* e *B*.
2) *A* e não *B*.
3) não *A* e *B*.
4) não *A* e não *B*

Entendo por



a negação do terceiro caso[25]. Esta convenção pode parecer muito artificial. À primeira vista, não é claro por que escolho justamente o terceiro caso e expresso sua negação mediante um sinal especial. A razão tornar-se-á imediatamente evidente através de um exemplo. A expressão



nega o caso em que x^2 não é igual a 4, quando $x + 2 = 4$. Isto pode ser traduzido assim: se $x + 2 = 4$, então $x^2 = 4$. Tal tradução exibe a importância da

23. Cf. cap. 5, nota 6, (N. do T.).
24. Aqui, Frege mostra como obter as proposições complexas a partir dessas quatro combinações de conjunções e negações. Este é o processo de que ele se utiliza na *Conceitografia*, § 5 (N. do T.).
25. O terceiro caso é '(não *A* e *B*)', sua negação será 'não(não *A* e *B*)', que equivale a '(*A* ou não *B*)', que também equivale a 'Se *A*, então *B*' (N. do T.).

Diante da expressão de um conteúdo asserível[21], como 2 + 3 = 5, coloco um traço horizontal, o traço de conteúdo (*Inhaltsstrich*), que se distingue do sinal de subtração por seu maior comprimento:

$$——\; 2+3=5.$$

Por meio deste traço quero dizer que o conteúdo que se lhe segue está unificado de tal modo que outros sinais podem a ele relacionar-se. Em

$$——\; 2+3=5$$

ainda não se formula um juízo. Pode-se, portanto, sem incorrer em falsidade, escrever também

$$——\; 4+2=7.$$

Se quero asserir um conteúdo como correto, coloco na extremidade esquerda do traço de conteúdo o traço de juízo (*Urteilsstrich*)

$$\vdash\!\!—\; 2+3=5.$$

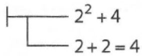
Como se é tão mal compreendido às vezes! Mediante essa notação, julguei ter estabelecido uma nítida diferença entre o ato de julgar e a formação de um conteúdo asserível, e Rabus[22] me acusa de misturar os dois!

A fim de expressar a negação de um conteúdo [asserível], acrescento ao traço de conteúdo o traço de negação, por exemplo

$$—\!\!\!\top\!\!\!—\; 4+2=7.$$

21. Frege começa aqui a expor como ele constrói o cálculo proposicional (N. do T.).
22. [L. Rabus, 1835-1916] *Die neuesten Bestrebungen auf dem Gebiete der Logik bei den Deutschen und die logische Frage*, Erlangen, 1880.

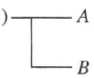
relação encerrada em nosso sinal. Pois o juízo hipotético[26] é a forma comum a todas as leis da natureza e a forma de todas as relações causais em geral. A linguagem corrente não permite que se traduza esse sinal em todos os casos por "se". Ela só o admite naquele caso em que uma parte do conteúdo, como o x aqui, é indeterminada e confere ao todo uma generalidade[27]. Se substituirmos x por 2, já não será adequado traduzir



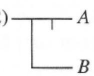
por

"se $2 + 2 = 4$, então $2^2 = 4$".

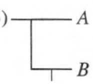
Consideremos agora as combinações do traço de implicação com os traços de negação na seguinte tabela:

1) 

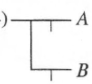
O caso "não *A* e *B*" é negado

2) 

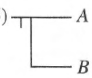
O caso "*A* e *B*" é negado: *A* e *B* excluem-se mutuamente.

3) 

O caso "não *A* e não *B*" é negado: *A* ou *B*.

4) 

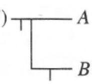
O caso "*A* e não *B*" é negado.

5) 

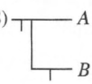
O caso "não *A* e *B*" é afirmado: *B* e não *A*.

6) 

O caso "*A* e *B*" é afirmado: *A* e *B*.

7) 

O caso "não *A* e não *B*" é afirmado: nem *A* nem *B*.

8) 

O caso "*A* e não *B*" é afirmado: A e não B.

26. Por 'juízo hipotético' (*hypothetische Urteil*) cumpre entender o que mais tarde Russell veio a denominar de 'implicação material' (N. do T.).

27. Essa 'parte indeterminada', como está escrito, Frege virá mais tarde chamar de 'indicador indefinido'. Cf. cap. 5, n. 10 (N. do T.).

QUADRO RESUMO – CONECTIVOS

Conectivo	Símbolo	Exemplo	Sentido
Negação	~	~A	Não ocorre A
Conjunção	∧	A ∧ B	Ocorre A e ocorre B
Disjunção Inclusiva	∨	A ∨ B	Ocorre A ou ocorre B ou ocorre ambos
Disjunção Exclusiva	∨∨	A ∨∨ B	Ocorre A ou ocorre B, porém não ocorre ambos
Condicional	→	A → B	Não ocorre A ou ocorre B
Bicondicional	↔	A ↔ B	Ou ocorre A e ocorre B, ou não ocorre A e não ocorre B

Negação (intuitivamente: não) Símbolo gráfico: ~

Tabela-verdade:

A	~A
V	F
F	V

Notemos então que:
A operação negação inverte o valor-verdade de A

Conjunção (intuitivamente: e) Símbolo Gráfico: ∧

Tabela-verdade:

A	B	(A ∧ B)
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Notar que:
(1) (A ∧ B) é V se, e somente se,
A e B são ambas V
(2) Se A ou B é F, então (A ∧ B) é F

Disjunção (intuitivamente: ou) Símbolo Gráfico: ∨

Tabela-verdade:

A	B	(A ∨ B)
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Notar que:
(1) (A ∨ B) é **F** se, e somente se,
A e B são ambas **F**
(2) Se A ou B é **V**, então (A ∨ B) é **V**

Condicional (intuitivamente: se ... então __) Símbolo Gráfico: →

Tabela-verdade:

A	B	(A → B)
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Notar que:
1. (A → B) é **F** se, e somente se, A é **V** e B é **F**
2. Se A é **F**, então (A → B) é **V**
3. Se B é **V**, então (A → B) é **V**

Definição. O antecedente de uma condicional é a sentença que se encontra antes do conectivo → (no caso A).

Definição. O conseqüente de um condicional é a sentença que se encontra depois do conectivo → (no caso B).

Bicondicional (intuitivamente: ... se, e somente se, __) Símbolo Gráfico: ↔

Tabela-verdade:

A	B	(A ↔ B)
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Notar que:
(A ↔ B) é **V**
se, e somente se,
A e B têm o mesmo valor-verdade.

UM EXEMPLO ATUAL EM FILOSOFIA DA LÓGICA: A LÓGICA SEGUNDO G.-G.GRANGER

Até aqui, apresentamos os elementos que nos permite fazer uma análise lógica dos argumentos e introduzir uma conceitografia (a ser completamente desenvolvida adiante) que garanta a correção de um argumento que segue certas regras sintáticas apenas. Essa análise e essa conceitografia não determinam diretamente seja uma ontologia seja uma metafísica para esses elementos, no sentido de são adotadas por correntes com metafísicas e ontologias diferentes. Denominamos de Filosofia da Lógica à área que estuda essa natureza dos elementos aqui apresentados. Nessa seção, vamos apresentar sucintamente, como exemplo, uma interpretação em Filosofia da Lógica da linguagem da Lógica Proposicional Clássica tal que: (1) as letras sentenciais designem objetos quaisquer que têm como única propriedade explícita estarem presentes ou ausentes; e (2) os conectivos designem as relações/operações entre eles. Essa interpretação é feita por Gilles Gaston Granger (Lógica e Filosofia das Ciências, São Paulo: Edições Melhoramentos, 1955, Parte III, Cap. IV), que apresenta a Lógica Proposicional Clássica como sendo a Lógica estrito senso (cf. Formes, Opérations, Objets. Paris: J.Vrin,1994, p.40). Em um sentido preciso, ele interpreta a Lógica Proposicional Clássica como expressando uma semântica de presença e ausências.

Assim temos, inicialmente, que os objetos são designados pelas letras latinas maiúsculas: A, B, C, etc.

Escrevemos, então, uma dessas letras, e.g., A, diretamente (ou seja, a usamos), quando queremos indicar sua presença, e escrevemos uma dessas letras entre aspas, e.g., 'A' quando queremos apenas a mencionar.

Para indicar a ausência de A, escrevemos ~A. Assim, o conectivo ~ designa a operação, denominada de negação, que passa da presença do objeto a sua ausência e da ausência do objeto a sua presença, segundo a tabela ao lado.

A	~A
Presente	Ausente
Ausente	Presente

Para indicar a presença de dois objetos, e.g., A e B, usamos o signo ∧ e escrevemos A∧B. Assim, o signo ∧ designa a operação conjunção que é tal que A∧B está presente, se, e somente se, A e B estão ambos presentes, o que nos dá a tabela ao lado.

A	B	A∧B
Presente	Presente	Presente
Presente	Ausente	Ausente
Ausente	Presente	Ausente
Ausente	Ausente	Ausente

Notemos que a ausência de ambos objetos A e B, pode ser indicada por ~A∧~B.

Para indicar que um entre dois objetos, e.g., A e B, está presente (podendo estar ambos presentes), usamos o signo ∨ e escrevemos A∨B. Assim, o signo ∨ designa a operação *disjunção inclusiva* que é tal que (1) A∨B está presente se, e somente se, pelo menos um dos dois, A ou B, está presente; ou ainda, equivalentemente, (2) A∨B está ausente se, e somente se, A e B estão ambos ausentes, o que nos dá a tabela ao lado.

A	B	A∨B
Presente	Presente	Presente
Presente	Ausente	Presente
Ausente	Presente	Presente
Ausente	Ausente	Ausente

Para indicar que, se um objeto, e.g., *A*, está presente, então um objeto, e.g., B, está presente, usamos o signo → e escrevemos A→B. Assim, o signo → designa a operação *condicional* que é tal que (1) A→B está presente se, e somente se, ambos, *A* e B, estão presentes ou *A* está ausente; (2) ou ainda, equivalentemente, A→B está ausente se *A* está presente e B está ausente, o que nos dá a tabela ao lado.

A	B	A→B
Presente	Presente	Presente
Presente	Ausente	Ausente
Ausente	Presente	Presente
Ausente	Ausente	Presente

Vemos então que esse último conectivo capta um tipo de relação de implicação, chamada de implicação material. Com efeito, vale para ela as regras Modus Ponens (se A→B está presente e *A* está presente, então necessariamente B está presente) e Silogismo Hipotético (se A→B está presente e B→*C* está presente, então necessariamente *A*→*C* está presente).

Para indicar que um objeto, e.g., *A* está presente se, e somente se, um objeto, e.g., B, está presente, usamos o signo ↔ e escrevemos A↔B. Assim, o signo ↔ designa a operação *bicondicional* que é tal que (1) A↔B está presente se, e somente se, os dois, *A* e B, estão presente, ou se, os dois, *A* e B, estão ausentes; (2) ou ainda, equivalentemente, A↔B está presente se, e somente se ambos tem o mesmo estado, o que nos dá a tabela ao lado.

A	B	A↔B
Presente	Presente	Presente
Presente	Ausente	Ausente
Ausente	Presente	Ausente
Ausente	Ausente	Presente

Por fim, para indicar que um entre dois objetos, e.g., *A* e B, está presente (não podendo estar ambos presentes), usamos o signo ∨∨ e escrevemos A∨∨B. Assim, o signo ∨∨ designa a operação *disjunção exclusiva* que é tal que (1) A∨∨B está presente se, e somente se, um dos dois, *A* ou B, está presente, mas não ambos, o que nos dá a tabela ao lado.

A	B	A∨∨B
Presente	Presente	Ausente
Presente	Ausente	Presente
Ausente	Presente	Presente
Ausente	Ausente	Ausente

Notemos então que as tautologias estão sempre presentes, as contradições nunca estão presentes e as contingências às vezes estão presentes às vezes estão ausentes. Podemos dizer que a eterna presença das tautologias indica a correção da Lógica Proposicional Clássica enquanto base de todo o pensar. Ou como nos diz Granger (Idem, p.61): "Podemos dizer que ele [o objeto qualquer definido apenas pelas operações dos conectivos da Lógica Proposicional Clássica] desenha então uma possibilidade do objeto mais que um objeto mesmo, e que nesse sentido a lógica formal tem um porte transcendental [...]" , e, ainda, que "O lógico, regra *a priori* de toda expressão da experiência, não é conhecido por abstração a partir dessa experiência, exceto no sentido de que a precede; contudo ele é necessariamente *forma de um mundo* e não apenas forma de uma linguagem, ou mais exatamente, nesse caso, a forma de uma linguagem só pode ser que forma de um mundo."

TABELA-VERDADE E ARGUMENTO VÁLIDO: O MÉTODO DIRETO

No sentido de constituir teorias formais ou sistemas formais mais expressivos, inserimos os conectivos (negação, conjunção, disjunção, condicional e bicondicional) e vimos algumas regras de inferências a eles associadas. Vimos, na lição anterior, como expressar o sentido dos conectivos e das formulas em geral, em termos de V ou F, ou seja, construindo tabelas-verdades. Já que a Lógica estuda (também) os argumentos válidos de uma teoria (inclusive de teorias formais), podemos nos perguntar:

Será que podemos expressar, em termos de tabelas-verdades,
a noção de validade de um argumento na linguagem formal vista até agora?

Ou ainda:

Será que, dado um argumento na linguagem formal vista até agora,
podemos usar as tabelas-verdade para determinar se ele é válido ou não?

É o que faremos nesta lição. Comecemos relembrando a definição de argumento válido.

Definição. Um argumento é **válido** se, e somente se, todas às vezes que suas premissas são verdadeiras, sua conclusão também o é.

A partir dessa definição podemos estabelecer o seguinte método.

Definição. Dado um argumento, chamamos <u>Método Direto</u> a construção das tabelas-verdade das premissas e da conclusão para avaliar se:

(1) em todos os casos (linhas da tabela-verdade) em que as premissas são verdadeiras a conclusão é verdadeira e, portanto, o argumento é válido; ou

(2) há um caso (linha da tabela-verdade) com premissas verdadeiras e conclusão falsa e, portanto, o argumento não é válido.

Exemplo: Verificar se os argumentos a seguir são válidos.

(1) $A \rightarrow B$
$\sim B$
____
$\sim A$

(2) $A \rightarrow B$
$\sim A$
____
$\sim B$

(1) Analisando o argumento temos:

Casos possíveis			Premissas		Conclusão
	A	B	$A \rightarrow B$	$\sim B$	$\sim A$
[1]	V	V	V	F	F
[2]	V	F	F	V	F
[3]	F	V	V	F	V
*[4]	F	F	V	V	V

Em todos os casos em que as premissas são verdadeiras (que, na tabela-verdade acima, se reduz apenas à linha [4], indicada por um asterisco à frente), a conclusão é verdadeira (indicado pelo negrito e sublinhado) e, portanto: o argumento é válido.

Aliás, a forma desse argumento define a regra de inferência chamada de *ModusTollens:*

$$\begin{array}{c} X \rightarrow Y \\ \sim Y \\ \hline \sim X \end{array}$$

Exemplo:

Se chove, a rua está molhada.
A rua não está molhada.
Logo, não chove.

(2) Analisando o argumento abaixo temos a tabela a seguir.

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ \sim A \\ \hline \sim B \end{array}$$

:

Casos possíveis			Premissas		Conclusão
	A	B	A → B	~A	~B
[1]	V	V	V	F	F
[2]	V	F	F	F	V
*[3]	F	V	V	V	F
[4]	F	F	V	V	V

Existe um caso (indicado com asterisco) em que as premissas são verdadeiras e conclusão é falsa e, portanto: o argumento não é válido.

Argumentos dessa forma são chamados de *falácia da negação do antecedente*.

Exemplo:

Se chove, a rua está molhada.
Não chove.
Logo, a rua não está molhada.

Esse argumento é uma falácia, pois podemos ter o caso em que as premissas são verdadeiras (quando não está chovendo) e a rua está molhada (por exemplo, alguém está lavando a calçada), que é exatamente o caso da linha [3] da tabela acima.

Exercício. Verificar se os argumentos a seguir são válidos.

(1)
$$\begin{array}{c} A \\ A \rightarrow B \\ \hline A \wedge B \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{c} A \\ B \\ (A \wedge B) \rightarrow C \\ \hline C \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \\ \hline A \rightarrow C \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{c} A \vee B \\ A \vee \sim B \\ \hline A \end{array}$$

O MÉTODO DA CONDICIONAL ASSOCIADA

Vimos, na lição anterior, como determinar, com o uso das tabelas-verdades, se um argumento (escrito em nossa linguagem artificial) é válido ou não. Para isso, tivemos que construir várias tabelas-verdade, uma para cada premissa e uma para a conclusão, e comparar essas tabelas em cada linha. Podemos nos perguntar então:

Será que existe um método mais conciso para avaliar,

com tabelas-verdade, a validade de um argumento?

É o que veremos nessa lição. Para tal, introduzimos a definição abaixo e o resultado a seguir.

Definição. A condicional associada ao argumento

$$\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \\ \hline Y \end{array}$$

é a fórmula:

$$(X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_k) \rightarrow Y$$

i.e., é a condicional cujo antecedente é a conjunção das premissas do argumento $X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_k$ e o conseqüente é a conclusão Y do argumento.

Exemplos. Segue alguns argumentos e logo abaixo as suas condicionais associadas.

$$\begin{array}{c} A \\ A \rightarrow B \\ \hline B \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \\ \hline A \vee B \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \\ \hline A \rightarrow C \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \rightarrow B \\ A \wedge C \\ D \\ \hline B \end{array}$$

$A \rightarrow (A \vee B)$

$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ $\qquad ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$

$((A \rightarrow B) \wedge (A \wedge C) \wedge D) \rightarrow B$

Proposição. O argumento

$$\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \\ \hline Y \end{array}$$

é válido se, e somente se, sua condicional associada $(X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_k) \rightarrow Y$ é uma tautologia.

A proposição acima motiva o seguinte método.

Definição. O Método da Condicional Associada é o método que consiste em:

(1) construir a condicional associada ao argumento;

(2) construir sua tabela-verdade;

(3) verificar que a condicional associada ao argumento é uma tautologia e, portanto, o argumento é válido; ou

(4) verificar que a condicional associada ao argumento não é uma tautologia e, portanto, o argumento não é válido.

Exemplo. Verificar, com o Método da Condicional Associada, se os argumentos a seguir são válidos.

(1) $A \rightarrow B$
$\sim B$
―――――
$\sim A$

(2) $A \rightarrow B$
$\sim A$
―――――
$\sim B$

(1) A condicional associada do argumento é $((A \rightarrow B) \wedge \sim B) \rightarrow \sim A$. Analisando-a, temos:

A	B	((A	→	B)	^	~	B)	→	~	A
V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	V
V	F	V	F	F	F	F	F	V	F	V
F	V	F	V	V	V	V	V	V	V	F
F	F	F	V	F	F	F	F	V	V	F

A condicional associada é uma tautologia, portanto, o argumento é válido.

(2) A condicional associada do argumento é $((A \rightarrow B) \wedge \sim A) \rightarrow \sim B$. Analisando-a, temos:

A	B	((A	→	B)	^	~	A)	→	~	B
V	V	V	V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	F	F	V	V	V	F
F	V	F	V	V	V	V	F	V	F	V
F	F	F	V	F	V	V	F	V	V	F

A condicional associada não é uma tautologia, portanto, o argumento não é válido.

Observação. Para entendermos os resultados acima, observemos que, em um argumento válido, as premissas implicam a conclusão, o que motiva a definição a acima, pois a condicional associada ao argumento expressa, em apenas uma única fórmula de nossa linguagem artificial, que a conjunção das premissas do argumento implica a sua conclusão. Segundo a proposição acima, temos que um argumento é válido se, e somente se, a condicional associada é sempre verdadeira (tautologia), isto é, se as premissas sempre implicam a conclusão.

Exercício. Usando o Método da Condicional Associada, mostre que são válidas as regras de inferência: Adição, Redução ao Absurdo, Bicondicional para o Condicional, Condicional para o Bicondicional.

Notemos que os exercícios finais da lição passada mostram, pelo Método da Condicional Associada, que as regras de inferência Simplificação, Modus Ponens, Modus Tollens e Silogismo Disjuntivo são válidas, já que mostramos que as condicionais associadas a essas regras são tautologias.

O MÉTODO DAS RAMIFICAÇÕES

As tautologias desempenham um importante papel em Lógica, pois como são fórmulas sempre verdadeiras, independentes do contexto, isto é, dos possíveis valores-verdade das suas fórmulas que a compõe, as tautologias são verdades lógicas.

Vimos que a construção de tabelas-verdade é um método que permite determinar se uma fórmula é ou não uma tautologia. Nesse método, determinamos o valor-verdade da fórmula em todos as combinações possíveis dos valores-verdade das fórmulas que a compõe e, por isso, algumas vezes, o método pode levar a extensas tabelas-verdades, dependendo do número de letras que compõe a fórmula a ser testada. Mas:

Será que precisamos testar todas as possibilidades
para verificar se uma fórmula é uma tautologia?

Ou ainda:

Será que há métodos mais diretos (que a tabela-verdade)
para se determinar se uma fórmula é ou não uma tautologia?

A resposta a essa pergunta é afirmativa.

Um exemplo, é a demostração (veremos mais adiante um sistema formal cujos teoremas, isto é, as formulas que têm demonstração, são tautologia), e talvez seja por isso que, naturalmente, usamos a demonstração para chegar a uma verdade lógica.

Mas há outros métodos também. Por exemplo, considere a fórmula: $A \vee (B \vee \sim A)$.

Se (1) $A \vee (B \vee \sim A)$ for considerada falsa, como ela é uma disjunção, então, neste caso, (2) A é falsa e (3) $B \vee \sim A$ é falsa. Mas, se $B \vee \sim A$ é falsa, então (4) B é falsa e (5) $\sim A$ é falsa, ou seja, (6) A é verdadeira. Ora, portanto, se $A \vee (B \vee \sim A)$ for considerada falsa, temos que A é falsa e verdadeira ao mesmo tempo, o que é um absurdo; logo, $A \vee (B \vee \sim A)$ é sempre verdadeira, ou seja, é uma tautologia.

Notemos que o que foi feito foi mostrar que é absurdo supor que $A \vee (B \vee \sim A)$ não é uma tautologia (essa forma de raciocínio é chamado de *redução ao absurdo* ou *redução ao impossível*). Podemos representar sinteticamente o que foi dito com o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ll} (1) & \sim(A \vee (B \vee \sim A)) \\ (2) & \quad \sim A \\ (3) & \sim(B \vee \sim A) \\ (4) & \quad \sim B \\ (5) & \quad \sim\sim A \\ (6) & \quad\quad A \\ & \quad\quad \times \end{array}$$

O signo "x" abaixo do diagrama acima indica que a sequência tem uma fórmula e a negação dela, no caso, $\sim A$ (fórmula (2)) e A (formula (6)).

Tal forma de proceder motiva o seguinte método.

Definição. Dada uma fórmula para ser determinado se ela é ou não uma tautologia, o

Método das Ramificações consiste em negar a fórmula e aplicar as regras de desdobramento abaixo até se obter todos os ramos *fechados* (isto é, com uma fórmula e a negação dela) ou até não se poder mais aplicar as regras de desdobramento:

A fórmula é uma tautologia se, e somente se, todos os ramos são fechados.

Assim, se há um ramo *aberto* (isto é, que não tem uma fórmula e sua negação), a fórmula não é uma tautologia.

Regras de Desdobramento

$\sim\sim A$	**$A \wedge B$**	**$A \vee B$**	**$A \rightarrow B$**	**$A \leftrightarrow B$**
A	A	Λ	Λ	Λ
	B	A B	$\sim A$ B	A $\sim A$
				B $\sim B$
	$\sim(A \wedge B)$	**$\sim(A \vee B)$**	**$\sim(A \rightarrow B)$**	**$\sim(A \leftrightarrow B)$**
	Λ	$\sim A$	A	Λ
	$\sim A$ $\sim B$	$\sim B$	$\sim B$	A $\sim A$
				$\sim B$ B

Notemos que o signo "Λ" indica que devemos considerar duas possibilidades, gerando uma bifurcação na sequência de fórmulas a ser considerada, o que faz com que o Método das Ramificações gere uma forma de árvore de cabeça para baixo: chamamos de "raiz" à formula negada inicial e de "ramo" a uma sequência de fórmulas que parte da raiz até uma última fórmula da sequência de desdobramentos. No exemplo acima, temos uma "árvore" com apenas um ramo constituído pela sequência de fórmulas de (1) a (6) e a $\sim(A \vee (B \vee \sim A))$ é a fórmula raiz; o ramo é fechado pois tem a contradição A e $\sim A$ (fórmulas (2) e (6)). Vejamos abaixo um exemplo de ramificação com dois ramos.

Exemplo. Determinar se a fórmula $(\sim A \wedge \sim B) \rightarrow \sim(A \vee B)$ é uma tautologia.

(1) $\sim((\sim A \wedge \sim B) \rightarrow \sim(A \vee B))$ ✓

(2) $\sim A \wedge \sim B$ ✓   (1~→)

(3) $\sim\sim(A \vee B)$ ✓   (1~→)

(4) $\sim A$ (2∧)

(5) $\sim B$ (2∧)

(6) $A \vee B$ ✓   (3~~)

Λ

(7) A (6∨)   (8) B (6∨)

×   ×

Notemos que a direita das fórmulas acima indicamos didaticamente, entre parênteses, a fórmula e a regra de desdobramento que a originou, mas, em geral não precisamos fazer isso. Notemos também a presença do sinal "✓" após uma fórmula para indicar que foi aplicada uma regra de desdobramento à fórmula.

Notemos por fim que, na ramificação acima, temos dois ramos:

1. a sequência de fórmulas (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7); e
2. a sequência de fórmulas (1), (2), (3), (4), (5), (6), (8).

O primeiro ramo é fechado devido a presença das fórmulas (4) e (7) e o segundo é fechado devido a presença das fórmulas (5) e (8).

Observação. É importante notar que temos escrever o resultado da aplicação de uma regra de desdobramento **em TODOS os ramos abertos abaixo da fórmula** na qual se aplica a regra de desdobramento, conforme o exemplo abaixo.

Exemplo. Determinar se a fórmula $((A \wedge \sim B) \vee (\sim B \wedge A)) \rightarrow \sim(A \rightarrow B)$ é uma tautologia.

$$\sim(((A \wedge \sim B) \vee (\sim B \wedge A)) \rightarrow \sim(A \rightarrow B)) \checkmark$$
$$(A \wedge \sim B) \vee (\sim B \wedge A) \checkmark$$
$$\sim\sim(A \rightarrow B) \checkmark$$
$$\wedge$$
$$(A \wedge \sim B) \checkmark \quad (\sim B \wedge A) \checkmark$$
$$A \qquad\qquad \sim B$$
$$\sim B \qquad\qquad A$$
$$\wedge \qquad\qquad \wedge$$
$$\sim A \;\; B \qquad\quad \sim A \;\; B$$

Notemos que a ramificação acima tem quatro ramos.

Por fim, vejamos um exemplo com uma fórmula que não é tautologia.

Exemplo. Determinar se a fórmula $(A \vee B) \rightarrow A$ é uma tautologia.

$$\sim((A \vee B) \rightarrow A) \checkmark$$
$$A \vee B \checkmark$$
$$\sim A$$
$$\wedge$$
$$A \quad B$$
$$\times$$

O ramo a esquerda é fechado, pois contém as fórmulas A e ~A. Mas a fórmula não é uma tautologia, pois nem todos os ramos são fechados, já que o ramo da direita é abaerto, pois não tem uma fórmula e a negação dela. Temos, no ramo da direita, apenas as fórmulas B e ~A para as quais não há regras de desdobramento. Fórmulas desse tipo são importantes, pois indicam quando a fórmula que foi testada é falsa (e por isso não é uma tautologia), ou seja, no caso acima, quando B é verdadeira e A é falsa.

Assim, o Método da Ramificação permite determinar se uma fórmula é ou não tautologia e, mais ainda, caso a fórmula não seja tautologia, o Método permite determinar quais valores-verdades das fórmulas componentes a tornam falsa.

Exercício. Determine se as fórmulas abaixo são tautologias.

(1) $A \rightarrow (A \vee B)$ (2) $\sim(A \wedge \sim A)$ (3) $A \rightarrow A$

(4) $((A \vee B) \wedge \sim A) \rightarrow B$ (5) $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$ (6) $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$

O Método das Ramificações para Argumentos

Notemos que, segundo o resultado da lição O Método da Condicional Associada, um argumento é válido se, e somente se, sua condicional associada é uma tautologia.

Nesse sentido, podemos usar o Método da Ramificação para determinar se uma argumento é válido ou não: basta construir sua condicional associada e verificar, com o Método da Ramificação, se ela é ou não uma tautologia e, a partir disso, determinar se o argumento é válido ou não.

Por exemplo, as fórmulas (1), (4), (5) e (6) do exercício da lição anterior são, respectivamente, as condicionais associadas às regras de inferência Adição, Silogismo Disjuntivo, Silogismo Hipotético e Condicional para Bicondicional, assim, os resultados do exercício mostra que essas regras são argumentos válidos.

Além dessa aplicação do Método das Ramificações para determinar se um argumento é válido ou não, temos a seguinte forma definida abaixo.

Definição. Dada um argumento para ser determinado se ele é ou não válido, o **Método das Ramificações para Argumentos** consiste escrever a negação da conclusão do argumento e, abaixo, as premissas do argumento, e aplicar as regras de desdobramento a esse conjunto de fórmulas até se obter todos os ramos fechados ou até não se poder mais aplicar as regras de desdobramento:

o argumento é válido se, e somente se, todos todos os ramos são fechados.

Exemplo: Determine se o argumento abaixo é válido.

$$\begin{array}{c} A \land B \\ C \\ \hline A \land C \end{array}$$

Aplicando o método temos (notar que a negação da conclusão e as premissas estão em negrito):

$$\begin{array}{c} \mathbf{\sim(A \land C)} \checkmark \\ \mathbf{A \land B} \checkmark \\ \mathbf{C} \\ A \\ B \\ \wedge \\ \sim A \quad \sim C \\ \times \quad\; \times \end{array}$$

Exercício. Use o Método das Ramificações para Argumentos para mostrar que o Silogismo Hipotético é valido. Compare a árvore obtida com a do último exercício da lição anterior. Notar que o Método das Ramificações para Argumentos simplesmente abrevia o anterior: como o anterior começa com a negação da condicional associada, ele leva, necessariamente, a escrever a negação da conclusão e a conjunção das premissas, e a conjunção das premissas leva a escrever todas as premissas, o que é o início do Método das Ramificações para Argumentos.

Exercício. Escolha um argumento (em nossa linguagem artificial) já exposto anteriormente, ou crie algum, e determine se ele é ou não um argumento válido.

EQUIVALÊNCIA LÓGICA E INTERDEFINIBILIDADE DOS CONECTIVOS CLÁSSICOS

Comecemos com a seguinte questão:

Quanto afirmamos as fórmulas $A \vee B$ e $B \vee A$ estamos afirmando a mesma coisa?

Notemos então que apesar de, do ponto de vista sintático, as fórmulas $A \vee B$ e $B \vee A$ serem diferentes, do ponto de vista semântico, como estamos interpretando até agora, elas afirmam a mesma coisa, no sentido de que, se $A \vee B$ é verdadeira, então $B \vee A$ é verdadeira e vice-versa.

Essa relação entre as fórmulas motiva a definição a seguir de equivalência lógica.

Definição. Dizemos que X é logicamente equivalente a Y se temos que:

se X é V, então Y é V e, inversamente, se Y é V, então X é V.

Notação. Vamos escrever X=Y para denotar que X é logicamente equivalente a Y.

Exemplos:

$\sim\sim A = A$ $\qquad A \vee B = B \vee A$ $\qquad A \wedge A = A$ $\qquad (A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$

Notemos então que a equivalência lógica tem as seguintes propriedades.

Proposição (Propriedades da Equivalência Lógica).

(1) X = X (Reflexividade);

(2) Se X = Y, então Y = X (Simetria);

(3) Se X = Y e Y = Z, então X = Z (Transitividade).

Exercício. Mostre que a equivalência lógica tem as propriedades acima.

Definida então a equivalência lógica como no início dessa lição, podemos nos perguntar:

Será que existe um método para saber se duas fórmulas são logicamente equivalentes?

A proposição abaixo responde afirmativamente essa questão.

Proposição: Dadas duas fórmulas X e Y, temos que:

X = Y se, e somente se, a fórmula $(X \leftrightarrow Y)$ é uma tautologia.

Exercício. Mostre que $X \vee Y = \sim(\sim X \wedge \sim Y)$.

Pela proposição anterior, basta mostrar que $(X \vee Y) \leftrightarrow \sim(\sim X \wedge \sim Y)$ é uma tautologia, o que podemos ver pela tabela-verdade abaixo.

X	Y	$(X \vee Y)$	$\leftrightarrow$	$\sim$	$(\sim X$	$\wedge$	$\sim Y)$
V	V	V	V	V	F	F	F
V	F	V	V	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	F	V	V	V

Notemos, na tabela-verdade acima, que sempre que $X \vee Y$ é V, $\sim(\sim X \wedge \sim Y)$ é V, e vice-versa (como na definição de equivalência lógica) e que é isso que faz $(X \vee Y) \leftrightarrow \sim(\sim X \wedge \sim Y)$ ser uma tautologia. Notemos, na tabela-acima, que, inversamente, como $(X \vee Y) \leftrightarrow \sim(\sim X \wedge \sim Y)$ é uma tautologia, então $X \vee Y$ é V se, e somente se, $\sim(\sim X \wedge \sim Y)$ é V (equivalência lógica).

Vemos então que a equivalência lógica permite expressar uma igualdade entre os sentidos das fórmulas.

Existe então vários aspectos interessantes que podem ser daí derivados.

Por exemplo, o exercício anterior mostra que afirmar $X \vee Y$ é equivalente a afirmar $\sim(\sim X \wedge \sim Y)$ e, nesse sentido, podemos expressar o conectivo $\vee$ apenas com os conectivos $\wedge$ e $\sim$.

Vamos então investigar, agora, a possibilidade de definir conectivos uns pelos outros.

Podemos nos perguntar:

Será que também podemos expressar o conectivo $\rightarrow$ apenas com os conectivos $\wedge$ e $\sim$?

O exercício a seguir mostra que sim.

Exercício. Mostre que $X \rightarrow Y = \sim(X \wedge \sim Y)$.

Por fim, também podemos expressar o conectivo $\leftrightarrow$ em termos de $\wedge$ e $\sim$, conforme o exercício a seguir.

Exercício. Mostre que $X \leftrightarrow Y = (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$. Conclua, a partir deste resultado e dos resultados dos exercícios anteriores, que os conectivos $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ podem ser expressos em termos apenas dos conectivos $\wedge$ e $\sim$ e que, assim, podemos reduzir os conectivos de nossa linguagem artificial à uma linguagem apenas com os conectivos $\wedge$ e $\sim$ sem perder poder expressivo.

O exercício anterior mostra que podemos assumir a conjunção e a negação como noções primitivas e, a partir daí, derivar delas todas as outras noções relativas a disjunção, implicação e bicondicional. Em uma interpretação mais livre, podemos dizer, que da noção de simultaneidade e de negação, podemos derivar todas as outras noções lógicas (de alternativa, de implicação, etc.).

Notemos, por fim, que característica expressa no exercício anterior não é apenas relativa a $\wedge$ e $\sim$, como podemos constatar pelos exercícios abaixo.

Exercício. Mostre que $X \wedge Y = \sim(\sim X \vee \sim Y)$ e $X \rightarrow Y = \sim X \vee Y$ e que, assim, podemos também reduzir os conectivos de nossa linguagem artificial à uma linguagem apenas com os conectivos $\vee$ e $\sim$ sem perder poder expressivo. Note, em especial, que $X \rightarrow Y = \sim X \vee Y$ é a definição que adotamos para a implicação na lição Conectivos e Tabelas-Verdade.

Exercício. Mostre que $X \vee Y = \sim X \rightarrow Y$ e que $X \wedge Y = \sim(X \rightarrow \sim Y)$. Conclua que podemos reduzir os conectivos de nossa linguagem artificial à uma linguagem apenas com os conectivos $\rightarrow$ e $\sim$ sem perder poder expressivo.

Álgebra das Proposições e Álgebra de Boole

A noção de equivalência lógica nos permite definir uma álgebra das proposições (que estudaremos agora).

Preencha então o quadro abaixo apenas com V ou F: V denota uma fórmula sempre verdadeira (tautologia) e F uma fórmula sempre falsa (Contradição).

$V \wedge V =$	$V \wedge F =$	$F \wedge V =$	$F \wedge F =$
$V \vee V =$	$V \vee F =$	$F \vee V =$	$F \vee F =$
	$\sim V =$	$\sim F =$	

Agora, preencha o quadro abaixo apenas com X, V e F.

Leis da Idempotência

$X \wedge X =$ $\qquad$ $X \vee X =$

Leis dos Elementos Identidades

$X \wedge V =$ $\qquad$ $X \vee F =$ $\qquad$ $X \wedge F =$ $\qquad$ $X \vee V =$

Leis da Complementariedade

$X \vee \sim X =$ $\qquad$ $X \wedge \sim X =$ $\qquad$ $\sim\sim X =$ $\qquad$ $\sim V =$ $\qquad$ $\sim F =$

Notemos que, nas equações consideradas, X pode ser vista como uma variável (ou seja, X pode vir a se substituída tanto por V quanto por F), como mostra o exercício abaixo.

Exercício. Substitui X por V e por F nas equações acima e verifique que elas se reduzem as equações mais acima.

Temos ainda as seguintes leis.

Leis da Comutatividade

$$X \wedge Y = Y \wedge X \qquad X \vee Y = Y \vee X$$

Leis da Associatividade

$$X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z \qquad X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z$$

Leis da Distributividade

$$X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \qquad X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$$

Leis de De Morgan

$$\sim(X \wedge Y) = \sim X \vee \sim Y \qquad \sim(X \vee Y) = \sim X \wedge \sim Y$$

A partir das equivalências lógicas acima, podemos ver os conectivos $\wedge$, $\vee$ e $\sim$ como operadores matemáticos sobre os valores-verdade V e F e as letras X, Y e Z acima como variáveis (que podem ser substituídas por V ou F ou, ainda, por outras fórmulas com conectivos $\wedge$, $\vee$ e $\sim$), ou seja, podemos estabelecer uma Álgebra das Proposições.

Com efeito, para as equivalências lógicas vale a seguinte proposição.

Proposição (Regra da Substituição por Equivalentes).

Se X = Y e se, em uma fórmula Z, substituímos X por Y obtendo Z', então: Z' = Z.

Exemplos.

(1) Como $A \wedge A = A$, temos que $(A \wedge A) \wedge B = A \wedge B$, pois podemos substituir $A \wedge A$ por A.

(2) Considerando as equivalências $V \vee A = V$; $B \vee F = B$; e $V \wedge B = B$; temos que $(V \vee A) \wedge (B \vee F) = V \wedge B = B$.

Exercício. Calcule o valor das seguintes expressões.

(1) $\sim(A \wedge F)$ (2) $\sim(A \vee F) \wedge \sim(A \wedge V)$ (3) $A \wedge (\sim A \vee B)$

(4) Compare o resultado de (3) com a regra do Silogismo Hipotético.

Notemos, por fim, que as mesmas leis formais acima se aplicam a conjuntos, se interpretarmos o conectivo $\wedge$ como a operação de interseção $\cap$, o conectivo $\vee$ como a união $\cup$, ~ como a complementar $\complement$, F como o conjunto vazio $\varnothing$ e V como o conjunto universo U, como abaixo.

$\mathcal{U} \cap \mathcal{U} = \mathcal{U}$ $\mathcal{U} \cap \varnothing = \varnothing$ $\varnothing \cap \mathcal{U} = \varnothing$ $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$

$\mathcal{U} \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ $\mathcal{U} \cup \varnothing = \mathcal{U}$ $\varnothing \cup \mathcal{U} = \varnothing$ $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

$\complement\mathcal{U} = \varnothing$ $\complement\varnothing = \mathcal{U}$

Leis da Idempotência

$X \cap X = X$ $X \cup X = X$

Leis dos Elementos Identidades

$X \cap \mathcal{U} = X$ $X \cup \varnothing = X$ $X \cap \varnothing = \varnothing$ $X \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$

Leis da Complementariedade

$X \cup \complement X = \mathcal{U}$ $X \cap \complement X = \varnothing$ $\complement\complement X = X$ $\complement\mathcal{U} = \varnothing$ $\complement\varnothing = \mathcal{U}$

Leis da Comutatividade

$X \cap Y = Y \cap X$ $X \cup Y = Y \cup X$

Leis da Associatividade

$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$ $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$

Leis da Distributividade

$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ $X \vee (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

Leis de De Morgan

$\complement(X \cap Y) = \complement X \cup \complement Y$ $\complement(X \cup Y) = \complement X \cap \complement Y$

As leis acima definem então uma estrutura que é comum tanto à Álgebra das Proposições como à Álgebra de Conjuntos; mais ainda: definem uma álgebra abstrata, que vale para diversos conteúdos, chamada atualmente de Álgebra de Boole, em homenagem ao filósofo, lógico e matemático George Boole (1815-1864).

Quaisquer deduções feitas a partir das leis acima, como no exemplo (2) acima, $(V \vee A) \wedge (B \vee F) = B$, são válidas tanto para a Álgebra das Proposições quanto para a Teoria de Conjuntos; nesta, a dedução se torna $(\mathcal{U} \cup A) \cap (B \cup \varnothing) = B$. Logo, temos uma economia ao deduzirmos proposições apenas das leis acima, já que valem para ambos domínios. Vemos aqui uma das vantagens do pensamento formal abstrato resultante de sistemas de regras sintáticas bem definidas.

As interpretações dessas leis (em termos de proposição, conjuntos e, também, em termos de probabilidade) foram proposta por Boole, em 1847, em um pequeno livro, *Mathematical Analysis of Logic*, ampliando a discussão sobre elas, posteriormente, em *An Investigation of the Laws of Thought: On which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. Nessas obras, Boole já apresenta uma concepção de Matemática como um estudo consistindo de signos e de regras precisas para operar sobre signos e não apenas como uma ciência da medida e dos números, como era usual na época. Notemos então que existe uma semelhança dos temas da última obra de Boole citada e aqueles do *Órganon* de Aristóteles, ao tratar do lógico (silogismo) na Ciência e do raciocínio por possibilidade/probabilidade.

Observemos que as últimas leis da tabela acima, Leis de De Morgan, foram nomeadas assim em homenagem ao seu descobridor, Augustus De Morgan (1806-1871). Podemos ver, aqui também, como a Lógica, enquanto disciplina, é uma obra coletiva e como tem incorporada em seus resultados, várias descobertas de diversos pensadores.

Por fim, notemos que o estudo da Álgebra de Boole propiciou o surgimento dos computadores, nos quais, temos os conectivos $\wedge$, $\vee$ e ~ aplicados aos elementos 1 e 0, como na tabela abaixo (note que 1 e 0 fazem, respectivamente, os papeis de V e F e podem indicar uma propriedade física, como, por exemplo, passa corrente elétrica ou não passa corrente elétrica).

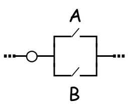
A	~A
1	0
0	1

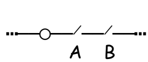
A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

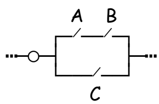
A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exercício. (1) Determine, em relação aos dois primeiros circuitos, qual corresponde ao $\wedge$ e qual corresponde ao $\vee$. (2) Escreva a fórmula associada ao último circuito.

○ – Lâmpada (1 – ligada; 0 – desligada)   —⁄— Interruptor (1 – ligado; 0 – desligado)







O Sistema S de Dedução Natural para a Lógica Proposicional Clássica

Vamos aqui introduzir um sistema de dedução natural (cf. a lição Demonstração Condicional e os Sistemas de Dedução Natural) para a Lógica Proposicional Clássica que designaremos por S. O sistema S tem apenas dois conectivos e três regras de inferência para facilitar mostrar, posteriormente, a correção e completude desse sistema, inclusive a correção e completude inferenciais (cf. a lição As Noções de Correção e Completude de um Sistema Formal). Como os sistemas de dedução natural são sistemas formais dedutivos que não possuem axiomas, apenas regras de inferência, então, para definir S, precisamos apenas definir: (1) o alfabeto de S, (2) as fórmulas de S, e (3) as regras de inferência de S.

(1) Alfabeto de S. O Alfabeto de S se constitui dos signos:

$$\sim, \rightarrow, A, B, C, A', B', C', A'', B'', C'', A''', B''', C''', \text{etc.}$$

O sistema S possui então apenas dois conectivos: ~ e →. Apesar disso, a nossa linguagem formal aqui definida tem ainda o mesmo poder expressivo que a linguagem formal que utilizamos até agora (com os conectivos ~, ∧, ∨, → e ↔), pois, como vimos na lição Equivalência Lógica, ∨, ∧ e ↔ podem ser definidos em termos de ~ e → apenas (cf. definições mais abaixo).

Chamaremos os signos A, B, C, A',B', C', A'', B'', C'', A''', B''', C''', etc. de *letras sentenciais*; introduzimos as linhas após as letras para não limitar o número de letras sentenciais.

(2) Fórmulas de S. São as fórmulas constituídas apenas de letras sentenciais e dos conectivos ~ e →; mais exatamente, as fórmulas de S são definidas pelas seguintes *regras de formação*:

(a) Letras sentenciais são fórmulas;

(b) Se X é uma fórmula, então ~X é uma fórmula; e

(c) Se X e Y são fórmulas, então (X → Y) é uma fórmula.

Notemos que (a) estabelece uma base para nossa definição e que, a partir dela, podemos construir (infinitas) fórmulas usando as regras (b) e (c) (este tipo de definição é chamada de *definição por indução*). Assim, temos que, por exemplo, (~B → A'') é uma fórmula, pois: pela regra (a), B e A'' são fórmulas (já que B e A''são letras sentenciais); por (b), ~B é uma fórmula (já que B é uma fórmula); e, por (c), (~B → A'') é uma fórmula (já que ~B e A'' são fórmulas). Ou seja, a fórmula (~B → A'') tem então a seguinte *árvore de construção*;

```
(~B → A'')
     Λ
   ~B  A'''
   /
  B
```

Vamos aqui adotar as seguintes definições:

$$X \vee Y :=_{def.} \sim X \rightarrow Y$$

$$X \wedge Y :=_{def.} \sim(X \rightarrow \sim Y)$$

$$X \leftrightarrow Y :=_{def.} (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$$

(notar que ∧ já está definido logo acima)

(3) Regras de Inferência de S.

Modus Ponens (MP)	Redução ao Absurdo (RA)	Demonstração Condicional (DC)
$$\begin{array}{c} X \to Y \\ X \\ \hline Y \end{array}$$	$$\begin{array}{c} \sim X \to Y \\ \sim X \to \sim Y \\ \hline X \end{array}$$	$$\begin{array}{c} \left\vert \begin{array}{c} X \\ \vdots \\ Y \end{array} \right. \\ \hline X \to Y \end{array}$$

Dados os elementos constituintes de nosso sistema S, podemos agora definir dedução e demonstração em S.

Definição. Uma **<u>dedução no sistema S</u>** de uma fórmula Z a partir das premissas X_1, X_2, ..., X_k é uma sequência de fórmulas Y_1, Y_2, ..., Y_m tal que:

(1) a última fórmula Y_m é Z; e

(2) cada fórmula Y_i da sequência:

(2.a) ou é uma da premissa X_j;

(2.b) ou é uma hipótese (usada na aplicação da regra de inferência DC);

(2.c) ou é a repetição de uma fórmula anterior da sequência[*];

(2.d) ou é o resultado da aplicação de umas das regras de inferência MP, RA ou DC[**].

Notação. Vamos indicar que existe uma dedução, no sistema S, da conclusão Z a partir das premissas X_1, X_2, ..., X_k por[***]:

$$X_1, X_2, \ldots, X_k \vdash Z$$

Exemplo. Mostrar que: (1) $X \to Y, Y \to Z \vdash X \to Z$; e (2) $Y \vdash X \to Y$.

$X \to Y, Y \to Z \vdash X \to Z$

1. $X \to Y$ Premissa
2. $Y \to Z$ Premissa
3. | X Hipótese
5. | Y MP 1,3
6. | Z MP 2,5
7. $X \to Z$ DC 3-6

$Y \vdash X \to Y$

1. Y Premissa
2. | X Hipótese
3. | Y Repetição
4. $X \to Y$ CD 2-3

Notemos que $X \to Y, Y \to Z \vdash X \to Z$ é a regra do Silogismo Hipotético (SH). Assim, no sistema S, SH é uma regra derivada das regras primitivas MP, RA e DC. Agora que sabemos que SH pode ser derivada, podemos usá-la como uma regra de nosso sistema: a ideia, ao usá-la, é que estamos subentendendo que poderíamos repetir essa dedução de SH.

Analogamente, **<u>toda forma de dedução no sistema S pode ser vista como estabelecendo uma regra de inferência (derivada)</u>**. Assim, $Y \vdash X \to Y$ estabelece também uma regra de inferência, chamada de **<u>Prefixação</u>** e abreviada por **<u>Pf</u>**; Pf diz que, de Y, podemos

[*] Só podemos repetir uma fórmula se ela não está sob uma hipótese já utilizada em uma regra DC.

[**] Só podemos aplicar essas regras a uma fórmula se ela não está sob uma hipótese já utilizada em uma regra DC.

[***] Em geral, usa-se o signo *S*, no sinal de dedução, i.e., $X_1, X_2, \ldots, X_n \vdash_S Z$, para indicar que se trata de uma dedução em S; entretanto, para simplificar, vamos aqui dispensar o uso do signo *S*.

concluir $X \to Y$, ou seja, podemos colocar o prefixo "$X \to$" antes de Y (daí seu nome).

Vamos agora definir uma demonstração em S. Cabe observar (ausência do item 2.a acima na definição abaixo) que: uma demonstração é apenas uma dedução sem premissas.

Definição. Uma **demonstração no sistema S** de uma fórmula Z é uma sequência de fórmulas $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ tal que:

(1) a última fórmula Y_m é Z; e

(2) cada fórmula da Y_i sequência:

(2.a) ou é uma hipótese (usada na aplicação da regra de inferência DC)

(2.b) ou é a repetição de uma fórmula anterior da sequência[*];

(2.c) ou é o resultado da aplicação de umas das regras de inferência MP, RA ou DC[**].

Definição. Um fórmula Z é um **teorema de S** se existe uma demonstração para Z.

Notação. Vamos indicar que existe uma demonstração da fórmula Z no sistema S, ou ainda, que Z é um teorema de S, por[***]:

$$\vdash Z$$

Exemplo. Mostre que: (1) $\vdash X \to X$ e (2) $\vdash \sim\sim X \to X$.

$\vdash X \to X$

1. | X Hipótese
2. | X Repetição 1
3. $X \to X$ DC 1-2

$\vdash \sim\sim X \to X$

1. | $\sim\sim X$ Hipótese
2. | $\sim X \to \sim\sim X$ Pf 1
3. | $\sim X \to \sim X$ PI
4. | X RA 2,3
5. $\sim\sim X \to X$ DC 1-4

Notemos que a fórmula $X \to X$ é chamada de **Princípio da Identidade** e abreviada por **PI** e que $\sim\sim X \to X$ é chamado de **Princípio da Dupla Negação**.

Notemos que, na demonstração de $\sim\sim X \to X$, usamos tanto a regra de Prefixação (na linha 2) quanto o Princípio da Identidade (na linha 3). Assim, podemos não só usar uma regra derivada nas novas demonstrações (como no caso de Pf), como também os teoremas, ou seja as fórmulas já demonstradas (como no caso de PI). Novamente, a ideia, de podermos usar um teorema (em uma dedução ou demonstração) e que no lugar dele poderíamos colocar toda a sua demonstração, assim, no lugar da fórmula 3 (PI), poderíamos colocar sua demonstração, feita acima.

---

[*] Só podemos repetir uma fórmula se ela não está sob uma hipótese já utilizada em uma regra DC.

[**] Só podemos aplicar essas regras a uma fórmula se ela não está sob uma hipótese já utilizada em uma regra DC.

[***] Também aqui, em geral, usa-se o signo *S*, no sinal de demostração, i.e., $\vdash_S Z$, para indicar que se trata de uma demonstração em S; e, também, para simplificar, vamos dispensar o uso do signo *S*.

ALGUNS ESQUEMAS DE DEDUÇÃO DO SISTEMA S

Na lição anterior, demonstramos, no Sistema S,

$\vdash X \rightarrow X$ (**Princípio da Identidade** – **PI**) e

$\vdash \sim\sim X \rightarrow X$ (**Princípio da Dupla Negação** – **PDN**)

e mostramos que são regras de inferência derivadas em S:

$X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z \vdash X \rightarrow Z$ (**Silogismo Hipotético** – **SH**) e

$Y \vdash X \rightarrow Y$ (**Prefixação** – **Pr**)

Nessa lição vamos exibir alguns esquemas de dedução em S que usaremos para mostrar a correção, a correção inferencial, a completude e a completude inferencial de S. Em especial, vamos deduzir também todas as regras de inferências de nosso sistema de dedução natural anterior e mostrar, assim, que podemos usá-las sempre que precisarmos, ou seja, vamos mostrar que:

S tem o mesmo poder dedutivo e demonstrativo que o sistema de dedução natural anterior

Proposição. No sistema S temos os seguintes esquemas de dedução.

$X, \sim X \vdash Y$ (**Ex Contradictione Quodlibet** – **CQ**)

$\sim X \vdash X \rightarrow Y$ (**Duns Scotus – DS**)

$\sim\sim X \vdash X$ (**Dupla Negação** – **DN**)

$X \vdash \sim\sim X$ (**Dupla Negação** – DN)

$X \vdash X \vee Y$ (**Adição** – **A**)

$Y \vdash X \vee Y$ (**Adição** – **A**)

$X \vee Y, \sim X \vdash Y$ (**Silogismo Disjuntivo** – **SD**)

$X \vee Y, \sim Y \vdash X$ (**Silogismo Disjuntivo** – **SD**)

$X \rightarrow Y \vdash \sim Y \rightarrow \sim X$ (**Contraposição** – **CP**)

$X \rightarrow Y, \sim X \rightarrow Y \vdash Y$ (**Segue do Terceiro Excluído** – **ST**)

$X, \sim Y \vdash \sim(X \rightarrow Y)$ (**Negação do Condicional** – **NC**)

$X \wedge Y \vdash X$ (**Simplificação** – **S**)

$Y \wedge X \vdash X$ (**Simplificação** – **S**)

$X, Y \vdash X \wedge Y$ (**Conjunção** – **C**)

$X, Y \vdash Y \wedge X$ (**Conjunção** – **C**)

$X \rightarrow Y, Y \rightarrow X \vdash X \leftrightarrow Y$ (**Condicional para Bicondicional** – **CB**)

$X \leftrightarrow Y \vdash X \rightarrow Y$ (**Bicondicional para Condicional** – **BC**)

$X \leftrightarrow Y \vdash Y \rightarrow X$ (**Bicondicional para Condicional** – **BC**)

Os esquemas de dedução se encontram a seguir.

$X, \sim X \vdash Y$ (CQ)
1. X Premissa
2. $\sim Y \rightarrow X$ Pf 1
3. $\sim X$ Premissa
4. $\sim Y \rightarrow \sim X$ Pf 2
5. Y RA 2,4

$\sim X \vdash X \rightarrow Y$ (DS)
1. $\sim X$ Premissa
2. | X Hipótese
3. | Y CQ 1,2
4. $X \rightarrow Y$ DC 2-3

$\sim\sim X \vdash X$ (DN)
1. $\sim\sim X$ Premissa
2. $\sim\sim X \rightarrow X$ PDN
3. X MP 1,2

$X \vdash \sim\sim X$ (DN)
1. X Premissa
2. $\sim\sim\sim X \rightarrow X$ Pf 1
3. $\sim\sim\sim X \rightarrow \sim X$ PDN
4. $\sim\sim X$ RA 2,3

$X \vdash X \vee Y$ (A)
1. X Premissa
2. $\sim\sim X$ DN 1
3. $\sim X \rightarrow Y$ DS 2
4. $X \vee Y$ Df. $\vee$ 3

$Y \vdash X \vee Y$ (A)
1. Y Premissa
2. $\sim X \rightarrow Y$ Pf 1
3. $X \vee Y$ Df. $\vee$ 2

$X \vee Y, \sim X \vdash Y$ (SD)
1. $X \vee Y$ Premissa
2. $\sim X \rightarrow Y$ Df. $\vee$ 1
3. $\sim X$ Premissa
4. Y MP 2,3

$X \vee Y, \sim Y \vdash X$ (SD)
1. $X \vee Y$ Premissa
2. $\sim X \rightarrow Y$ Df. $\vee$ 1
3. $\sim Y$ Premissa
4. $\sim X \rightarrow \sim Y$ Pf
5. X RA

$X \rightarrow Y \vdash \sim Y \rightarrow \sim X$ (CP)
1. $X \rightarrow Y$ Premissa
2. | $\sim\sim X$ Hipótese
3. | X DN 2
4. | Y MP 1,3
5. $\sim\sim X \rightarrow Y$ DC 2-4
6. | $\sim Y$ Hipótese
7. | $\sim\sim X \rightarrow \sim Y$ Pf 6
8. | $\sim X$ RA 5,7
9. $\sim Y \rightarrow \sim X$ DC 6-8

$X \rightarrow Y, \sim X \rightarrow Y \vdash Y$ (ST)
1. $X \rightarrow Y$ Premissa
2. $\sim X \rightarrow Y$ Premissa
3. $\sim Y \rightarrow \sim X$ CP 1
4. $\sim Y \rightarrow \sim\sim X$ CP2
5. Y RA 3,4

$X, \sim Y \vdash \sim(X \rightarrow Y)$ (NC)
1. X Premissa
2. $\sim Y$ Premissa
3. $\sim\sim(X \rightarrow Y) \rightarrow \sim Y$ Pf 2
4. | $\sim\sim(X \rightarrow Y)$ Hipótese
5. | $X \rightarrow Y$ DN 4
6. | Y MP 1,5
7. $\sim\sim(X \rightarrow Y) \rightarrow Y$ DC 4-6
8. $\sim (X \rightarrow Y)$ RA 3,7

$X \wedge Y \vdash X$ (S)
1. $X \wedge Y$ Premissa
2. $\sim(X \rightarrow \sim Y)$ Df. $\wedge$ 1
3. | $\sim X$ Hipótese
4. | $X \rightarrow \sim Y$ DS 3
5. | Z CQ 2,4
6. $\sim X \rightarrow Z$ DC 3,5
7. | $\sim X$ Hipótese
8. | $X \rightarrow \sim Y$ DS 7
9. | $\sim Z$ CQ 2,8
10. $\sim X \rightarrow \sim Z$ DC 7,9
11. X RA 6,10

$X \wedge Y \vdash Y$ (S)
1. $X \wedge Y$ Premissa
2. $\sim(X \rightarrow \sim Y)$ Df. $\wedge$ 1
3. | $\sim Y$ Hipótese
4. | $X \rightarrow \sim Y$ Pf 3
5. | Z CQ 2,4
6. $\sim Y \rightarrow Z$ DC 3,5
7. | $\sim Y$ Hipótese
8. | $X \rightarrow \sim Y$ Pf 7
9. | $\sim Z$ CQ 2,8
10. $\sim X \rightarrow \sim Z$ DC 7,9
11. X RA 6,10

$X, Y \vdash X \wedge Y$ (C)
1. X Premissa
2. Y Premissa
3. $\sim\sim Y$ DN* 2
4. $\sim(X \rightarrow \sim Y)$ NC 1,3
5. $X \wedge Y$ Df. $\wedge$ 4

$X, Y \vdash X \wedge Y$ (C)
Idem acima

$X \rightarrow Y, Y \rightarrow X \vdash X \leftrightarrow Y$ (CB)
1. $X \rightarrow Y$ Premissa
2. $Y \rightarrow X$ Premissa
3. $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$ C1,2
4. $X \leftrightarrow Y$ Df. $\wedge$ 3

$X \leftrightarrow Y \vdash X \rightarrow Y$ (BC)
1. $X \leftrightarrow Y$ Premissa
2. $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$ Df. $\wedge$ 1
3. $X \rightarrow Y$ S 2

$X \leftrightarrow Y \vdash Y \rightarrow X$ (BC)
1. $X \leftrightarrow Y$ Premissa
2. $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$ Df. $\wedge$ 1
3. $Y \rightarrow X$ S 2

O SISTEMA S E A REGRA DE DEMONSTRAÇÃO CONDICIONAL

Definidos o sistema S, dedução e demonstração no sistema S, podemos estudar as propriedades de S, em especial, em relação à dedução e à demonstração em S. Notemos que o sistema S estabelece operações sobre signos (isto é, aplicação de regras de inferência sobre fórmulas) e que estabelece um discurso que está um nível acima em relação aos argumentos usuais da linguagem natural; a partir de agora, para estudar as propriedades desse sistema, teremos um discurso sobre esse discurso, ou seja, um discurso de segundo nível; do ponto de vista cognitivo, faremos operações sobre operações.

Notemos então que podemos afirmar o seguinte resultado.

Proposição. Se $X \vdash Z$, então $\vdash X \rightarrow Z$.

Ou seja, se existe uma dedução de Z com premissa X, então existe uma demonstração de $X \rightarrow Y$.

Exemplo. Os resultados obtidos anteriormente: $\sim\sim X \vdash X$ e $\vdash \sim\sim X \rightarrow X$.

Para ver que vale, em geral, a Proposição acima, observemos que, uma dedução de Z a partir de X tem a forma:

1. X Premissa
⋮ (passos da dedução de Z)
n. Z

Se, ao invés de considerar X como premissa, consideramos X como hipótese de uma regra CD temos:

1. | X Hipótese
   | ⋮ (mesmos passos que acima)
n. | Z
n+1. $X \rightarrow Z$ CD 1-n

Ou seja, para toda dedução $X \vdash Z$, existe uma demonstração $\vdash X \rightarrow Z$.

Esse resultado pode ser generalizado como abaixo.

Proposição (DC): Se $X_1, X_2, \ldots, X_k \vdash Z$, então $X_1, X_2, \ldots, \vdash X_k \rightarrow Z$

Com efeito, suponhamos que existe a dedução $X_1, X_2, \ldots, X_k \vdash Z$:

1. X_1 Premissa
2. X_2 Premissa
⋮
k-1. X_{k-1} Premissa
k. X_k Premissa
⋮
k+m. Z

Então, existe a dedução $X_1, X_2, \ldots, \vdash X_k \rightarrow Z$:

1. X_1 Premissa
2. X_2 Premissa
⋮
k-1. X_{k-1} Premissa
k. X_k Hipótese
⋮
k+m. Z
k+m+1 $X \rightarrow Z$ CD n-n+m

A proposição acima tem uma infinidade de aplicações é um resultado importante, pois mostra como obter demonstrações a partir de deduções, como, por exemplo, obter $\vdash (X\rightarrow Y) \rightarrow (\sim Y\rightarrow\sim X))$ a partir de $X\rightarrow Y \vdash \sim Y\rightarrow\sim X$ (CP), ou $\sim X \vdash X \rightarrow Y$ (DS) a partir de $\sim X, X \vdash Y$ (CQ).

Notação. Observemos que vamos indicar as Proposições acima apenas pelo termo **Demonstração Condicional**, já que se trata apenas de uma aplicação dessa regra.

A CORREÇÃO INFERENCIAL DE S

Vamos, nesta lição, mostrar que o sistema de dedução natural S, definido na lição O Sistema S de Dedução Natural para a Lógica Proposicional Clássica, é inferencialmente correto (cf. a lição As Noções de Correção e Completude de um Sistema Formal), ou seja, vamos mostrar a proposição CI abaixo.

Correção Inferencial (CI). Se $X_1, X_2, \ldots, X_k \vdash Z$ (existe dedução de Z em S a partir das premissas $X_1, X_2, \ldots, X_k$,, então:

Se $X_1, X_2, \ldots, X_k$ são verdadeiras, então Z é verdadeira.

Certamente, temos que:

CI vale para deduções com zero aplicações de regras de inferência.

Com efeito, em uma dedução $X_1, X_2, \ldots, X_k \vdash Z$ com zero (nenhuma) regra de inferência, a conclusão Z é uma premissa X_i; e se as premissas são verdadeiras, X_i é verdadeira e Z também o é.

Vamos mostrar agora que:

Se CI vale para deduções com menos de n regras de inferência,
então CI vale para uma dedução com n regras de inferência.

Assim, mostraremos que:

CI vale para todas as deduções;

pois, como vimos,

CI vale para deduções com zero regras de inferência;

e se vale para zero, menos que uma regra de inferência, então,

CI vale para deduções com uma regra de inferência;

e se vale para zero e uma regra de inferência, menos que duas regras de inferência, então

CI vale para deduções com duas regras de inferência;

e se vale para zero, uma e duas regras de inferência, menos que três regras, então

CI vale para deduções com três regras de inferência;

e assim por diante.

Seja agora uma dedução $X_1, X_2, \ldots, X_k \vdash Z$ com n aplicação de regras de inferência.

Notemos que, neste caso, a conclusão Z resulta de fórmulas que foram deduzidas das premissas com menos de n regras de inferência. Essas fórmulas serão consideradas verdadeiras, por hipótese, para, a partir daí, mostrar que Z tem que ser verdadeira; com isso, mostraremos que:

Se CI vale para deduções com menos de n regras de inferência, então CI vale para uma dedução com n regras de inferência.

Observação. Essa hipótese, de que CI vale para os casos anteriores, para, a partir daí, mostrar que vale para os casos seguintes, é chamada de "hipótese de indução" e essa forma de demonstrar uma proposição é chamada de "demonstração por indução".

Temos, então, três casos para analisar, segundo a regra de inferência pela qual Z foi obtida: (1) MP, (2) RA e (3) DC.

(1) No caso em que Z foi obtida por MP, Z só pode ter sido obtida de fórmulas do tipo Y e $Y \rightarrow Z$; ou seja, a dedução de Z é da forma

1. X_1 Premissa

2. X_2 Premissa

⋮

k. X_k Premissa

⋮

l. Y

⋮

m. $Y \rightarrow Z$

m+1. Z MP l, m

Ora, mas, neste caso, houve deduções de Y e de $Y \rightarrow Z$ a partir das premissas X_1, X_2, …, X_k. E como essas deduções têm menos que n regras de inferência, por hipótese de indução, se as premissas X_1, X_2, …, X_k são V, então Y é V e $Y \rightarrow Z$ é V; e, como MP é um argumento válido, conforme vimos, temos então que Z é V.

(2) No caso em que Z foi obtida por RA, Z só pode ter sido obtida de fórmulas do tipo $\sim Z \rightarrow Y$ é V e $\sim Z \rightarrow \sim Y$; ou seja, a dedução de Z é da forma

1. X_1 Premissa

2. X_2 Premissa

⋮

k. X_k Premissa

⋮

l. $\sim Z \rightarrow Y$

⋮

m. $\sim Z \rightarrow \sim Y$

m+1. Z RA l, m

Ora, mas, neste caso, houve deduções de $\sim Z \rightarrow Y$ é V e $\sim Z \rightarrow \sim Y$ a partir das premissas X_1, X_2, …, X_k. E como essas deduções têm menos que n regras de inferência, por hipótese de indução, se as premissas X_1, X_2, …, X_k são V, então $\sim Z \rightarrow Y$ é V e $\sim Z \rightarrow \sim Y$ é V; e, como RA é um argumento válido, conforme vimos, temos então que Z é V.

(3) No caso em que Z foi obtida por DC, Z só pode ter a forma $Y \rightarrow W$ (que é a forma de uma conclusão da regra de inferência DC) e a dedução de Z é da forma

1. X_1 Premissa
2. X_2 Premissa
   ⋮
k. X_k Premissa
   ⋮
l. | Y Hipótese
   | ⋮

m. | W
m+1. $Y \rightarrow W$ CD l-m ($Y \rightarrow W$ é a fórmula Z)

Ora, mas, neste caso, houve uma dedução de W a partir das premissas $X_1, X_2, \ldots, X_k$ e Y. Como a dedução de W tem menos que n regras de inferência, por hipótese de indução, se as premissas $X_1, X_2, \ldots, X_k$ são V, temos que, se Y é V então W é V. Ou seja, neste caso, $Y \rightarrow W$ tem que ser V (pois, se $Y \rightarrow W$ fosse F, W seria F, o que não ocorre); logo, como $Y \rightarrow W$ é Z, Z tem que ser V.

Como analisamos os três casos possíveis e, para todos eles, se as premissas $X_1, X_2, \ldots, X_k$ são verdadeiras, a conclusão Z é verdadeira, temos que CI vale para todas as deduções do sistema S.

Notação. Em geral, denota-se que, se $X_1, X_2, \ldots, X_k$ são verdadeiras, então Z é verdadeira, por:

$$X_1, X_2, \ldots, X_k \models Z$$

Assim, uma das formas que se abrevia CI na literatura especializada é:

$$X_1, X_2, \ldots, X_k \vdash Z \Rightarrow X_1, X_2, \ldots, X_k \models Z$$

CI nos garante então que podemos usar o sistema S para fazer deduções, no sentido que, toda dedução em S, que parte de premissas $X_1, X_2, \ldots, X_k$ e chega a uma conclusão Z, expressa um argumento válido de premissas $X_1, X_2, \ldots, X_k$ e conclusão Z. Com isso, chegamos a elaborar uma conceitografia para a Lógica Proposicional Clássica, ou seja, uma linguagem tal que, apenas seguindo suas regras sintáticas (isto é, de manipulação de signos), temos garantida a correção de nossos argumentos.

A Correção de S

Vamos, nesta lição, mostrar que o sistema de dedução natural S, definido na lição O Sistema S de Dedução Natural para a Lógica Proposicional Clássica, é correto (cf. Também a lição As Noções de Correção e Completude de um Sistema Formal). Ou seja, vamos mostrar a proposição Co abaixo.

Correção (Co). Se existe demonstração em S de Z, então Z é uma tautologia.

Notemos que Co também pode ser expressa como

(Co') Se a fórmula Z é um teorema de S, então Z é uma tautologia

pois, por definição, Z é um teorema de S se, e somente se, existe demonstração em S de Z.

Vamos mostrar Co por indução, isto é, vamos mostrar que Co vale para para demonstrações com uma regra de inferência e, depois, mostrar que: se Co vale para demonstrações com menos que n regras de inferências, então Co vale para demonstrações com n regras de inferência. Assim, mostraremos que Co vale para todas as demonstrações de S.

Vejamos que: Co vale para demonstrações com uma apenas uma regra de inferência.

Notemos que uma demonstração não tem premissas (diferente de uma dedução) e assim, em uma demonstração com apenas uma regra de inferência, essa regra não pode ser MP ou RA, pois estas regras partem de premissas.

Assim, em uma demonstração com apenas uma regra de inferência, essa regra só pode ser DC (a partir de uma hipótese); seja então X essa hipótese; logo, a única demonstração possível com uma regra de inferência é da forma:

1. | X Hipótese
2. | X Repetição 1
3. $X \to X$ DC 1-2

Como $X \to X$ é uma tautologia, temos que: Co vale para demonstrações com uma apenas uma regra de inferência.

Vejamos que: se Co vale para demonstrações com menos que n regras de inferências, então Co vale para demonstrações com n regras de inferência.

Seja então uma demonstração da conclusão Z com n aplicação de regras de inferência.

Temos então três possibilidades, conforme a última regra aplicada foi: (1) MP, ou (2) RA, ou (3) DC.

Analisemos as três possibilidades.

(1) No caso em que Z foi obtida por MP, Z só pode ter sido obtida de fórmulas do tipo Y e $Y \to Z$; ou seja, a demonstração de Z é da forma

⋮

l. Y

⋮

m. $Y \to Z$

m+1. Z MP l, m

Ora, mas, neste caso, houve demonstrações de Y e de Y → Z e como essas demonstrações têm menos que n regras de inferência, por hipótese de indução, Y e de Y → Z são tautologias. Como MP é um argumento válido, conforme vimos, se Y e de Y → Z são sempre V (tautologias), então Z é sempre V (tautologia).

(2) No caso em que Z foi obtida por RA, Z só pode ter sido obtida de fórmulas do tipo ~Z → Y é V e ~Z → ~Y; ou seja, a dedução de Z é da forma

⋮

l. ~Z → Y

⋮

m. ~Z → ~Y

m+1. Z RA l, m

Ora, mas, neste caso, houve demonstrações de ~Z → Y é V e ~Z → ~Y. E como essas deduções têm menos que n regras de inferência, por hipótese de indução, ~Z → Y e ~Z → ~Y são tautologias; e, como RA é um argumento válido, conforme vimos, se ~Z → Y e ~Z → ~Y são sempre V (tautologias), então Z é sempre V (tautologia).

(3) No caso em que Z foi obtida por DC, Z só pode ter a forma Y → W (que é a forma de uma conclusão da regra de inferência DC) e a dedução de Z é da forma

⋮

l. | Y Hipótese

| ⋮

m. | W

m+1. Y → W CD l-m (Y → W é a fórmula Z)

Ora, mas, neste caso, houve uma dedução de W a partir de Y. Por CI, se Y é verdadeira, então W é verdadeira, ou seja, o argumento com premissa Y e conclusão W é válido, e sua condicional associada Y → W é tautologia; como Z é Y → W, temos que Z é uma tautologia.

Como analisamos os três casos possíveis e, para todos eles, Z é tautologia, temos que: se Co vale para demonstrações com menos que n regras de inferências, então Co vale para demonstrações com n regras de inferência.

Assim, temos que Co vale para demonstrações com uma regra de inferência e que, se Co vale para demonstrações com menos que n regras de inferências, então Co vale para demonstrações com n regras de inferência; com isso temos que Co vale para todas as demonstrações de S.

Notação. Em geral, denota-se que Z é uma tautologia, por:

$$\vDash Z$$

Logo, uma das formas que se abrevia Co na literatura especializada é:

$$\vdash Z \quad \Rightarrow \quad \vDash Z$$

Temos, como consequência de Co a seguinte proposição.

Proposição (Consistência). O sistema S é consistente. Isto é, em S, não demonstramos uma fórmula X e a negação dela ~X.

Com efeito, se X for demonstrável em S (X é teorema de S), então X é uma tautologia e ~X é uma contradição (pois como X é sempre verdadeira, ~X é sempre falsa); e assim, ~X não é demonstrável em S.

Assim, Consistência e Co nos garantem que, na nossa conceitografia (o sistema S), não demonstramos nada contraditório (é consistente) e, mais ainda, demonstramos o que é sempre verdadeiro (tautologias).

A Completude de S

Vamos, nesta lição, mostrar que o sistema de dedução natural S definido anteriormente é completo (cf. a lição As Noções de Correção e Completude de um Sistema Formal).

Antes, precisamos mostrar a seguinte proposição que nos ajudará a mostrar a completude e a completude inferencial.

Proposição (Dedução da linha da tabela-verdade). Dada uma linha da tabela-verdade de uma fórmula Z, com letras sentenciais $X_1, X_2, \ldots, X_k$ temos que:

$$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Z^*$$

em que

$$X_i^* = X_i \text{ se } X_i \text{ é V} \qquad \text{e} \qquad Z^* = Z \text{ se } Z \text{ é V}$$

$$X_i^* = {\sim}X_i \text{ se } X_i \text{ é F} \qquad\qquad Z^* = {\sim}Z \text{ se } Z \text{ é F}$$

Exemplo. A notação com estrela * acima nos permite referenciar às diversas linhas de uma tabela-verdade ao mesmo tempo, por exemplo, para a tabela-verdade abaixo, a notação $X_1^*, X_2^* \vdash Z^*$ expressa todas as deduções que estão abaixo dela.

X_1	X_2	Z	
A	B	$\sim A \to B$	$X_1^*, X_2^* \vdash Z^*$
V	V	V	$A, B \vdash {\sim}A \to B$
V	F	V	$A, {\sim}B \vdash {\sim}A \to B$
F	V	V	${\sim}A, B \vdash {\sim}A \to B$
F	F	F	${\sim}A, {\sim}B \vdash {\sim}({\sim}A \to B)$

Vamos mostrar a Proposição acima, de que $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Z^*$, por indução no número de conectivos de Z, isto é, vamos mostrar que:

(I) $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Z^*$ vale, se Z não tem conectivos (Z tem zero conectivos); e que,

(II) se $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Z^*$ vale para fórmulas com menos que n conectivos,

então $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Z^*$ vale para uma fórmula Z com n conectivos.

Com isso mostramos que $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Z^*$ vale para Z com qualquer número de conectivos, ou seja, $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Z^*$ vale para todas as fórmulas.

(I) Z tem zero conectivos. Se Z não tem conectivos, então Z é uma letra sentencial, por exemplo, a letra sentencial A. Na nossa notação acima, temos que X_1 é A, pois A é a única letra sentencial de Z. Temos então a tabela-verdade abaixo.

X_1	Z	
A	A	$X_1^* \vdash Z^*$
V	V	$A \vdash A$
F	F	$\sim A \vdash \sim A$

E, como temos no sistema S as deduções $A \vdash A$ e $\sim A \vdash \sim A$ (indicadas ao lado da tabela-verdade acima) temos que $X_1^* \vdash Z^*$, ou seja, a Proposição acima vale no caso em que Z não tem conectivos (Z tem zero conectivos).

(II) Z com n conectivos. Suponhamos que Z tem n conectivos e que a Proposição acima, vale para fórmulas com menos que n conectivos (hipótese de indução).

O último conectivo na construção de Z é ~ ou $\rightarrow$, ou seja, temos dois casos possíveis:

(1) Z é da forma ~Y (que indicaremos por Z = ~Y); ou

(2) Z é da forma $Y \rightarrow W$ (que indicaremos por $Z = Y \rightarrow W$).

Para cada um desses casos, temos dois subcasos:

(a) Z é V; ou

(b) Z é F.

Analisando os quatros subcasos possíveis, temos o seguinte.

(1.a) Z = ~Y e Z é V.

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Y^*$ (por hipótese de indução, pois Y tem menos que n conectivos)

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash \sim Y$ ($Y^* = \sim Y$, pois Y é F, já que Z é V e Z = ~Y)

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Z$ (Z = ~Y)

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Z^*$ ($Z^* = Z$, pois Z é V)

(1.b) Z = ~Y e Z é F.

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Y^*$ (por hipótese de indução, pois Y tem menos que n conectivos)

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Y$ ($Y^* = Y$, pois Y é V, já que Z é F e Z = ~Y)

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash \sim\sim Y$ (Pela regra DN aplicada a Y)

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash \sim Z$ (Z = ~Y)

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Z^*$ ($Z^* = \sim Z$, pois Z é F)

(2.a) $Z = Y \rightarrow W$ e Z é V. Se Z é V e $Z = Y \rightarrow W$, então (i) Y é F ou (ii) W é V.

(i) $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Y^*$ (por hipótese de indução, pois Y tem menos que n conectivos)

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash \sim Y$ ($Y^* = \sim Y$, pois Y é F, neste caso(i))

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Y \rightarrow W$ (Pela regra DS aplicada a ~Y)

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Z$ ($Z = Y \rightarrow W$)

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Z^*$ ($Z^* = Z$, pois Z é V)

(ii) $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash W^*$(por hipótese de indução, pois W tem menos que n conectivos)

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash W$ ($W^* = W$, pois W é V, neste caso(ii))

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Y \rightarrow W$ (Pela regra P aplicada a W)

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Z$ ($Z = Y \rightarrow W$)

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Z^*$ ($Z^* = Z$, pois Z é V)

(2.b) $Z = Y \rightarrow W$ e Z é F. Neste caso, como Z é F e $Z = Y \rightarrow W$, Y é V e W é F.

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash W^*$(por hipótese de indução, pois W tem menos que n conectivos)

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash \sim W$ ($W^* = \sim W$, pois W é F)

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Y^*$ (por hipótese de indução, pois Y tem menos que n conectivos)

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Y$ ($Y^* = Y$, pois Y é V)

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash \sim(Y \rightarrow W)$ (Pela regra NC aplicada a Y e ~W acima)

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash \sim Z$ ($Z = Y \rightarrow W$)

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Z^*$ ($Z^* = \sim Z$, pois Z é F)

Ou seja, em todos os casos possíveis, temos que, se $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Z^*$ vale para fórmulas Z com menos que n conectivos, então $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Z^*$ vale para uma fórmula Z com n conectivos. Com isso, e com o resultado anterior de que $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Z^*$ vale quando Z tem zero conectivos, mostramos que $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Z^*$ vale para todas as fórmulas.

Podemos agora mostrar o resultado central desta lição.

Completude.

Se a fórmula Z é uma tautologia, então Z é teorema de S, ou seja,
se a fórmula Z é uma tautologia, então existe uma demonstração de Z em S.

Com efeito, seja Z uma tautologia e $X_1, X_2, \ldots, X_k$ as letras sentenciais de Z. Neste caso:

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k^* \vdash Z$ ($Z^* = Z$, pois Z é sempre V).

Quando X_k é V, temos

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_k \vdash Z$

e pela Demonstração Condicional (veja a lição O Sistema S e a Regra de Demonstração Condicional) temos

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_{k-1}^* \vdash X_k \rightarrow Z$.

E quando X_k é F, temos

$X_1^*, X_2^*, \ldots, \sim X_k \vdash Z$

e pela Demonstração Condicional (idem acima) temos

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_{k-1} \vdash \sim X_k \rightarrow Z$.

Assim, a partir das premissas $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_{k-1}^*$ temos uma dedução de $X_k \rightarrow Z$ e uma dedução de $\sim X_k \rightarrow Z$ e (juntado as duas deduções, que são uma sequência de fórmulas, em uma única uma sequência de fórmulas), temos uma dedução de $X_k \rightarrow Z$ e $\sim X_k \rightarrow Z$, e, pela regra Segue do Terceiro Excluído (veja a lição Alguns Esquemas de Dedução do Sistema S), temos que existe uma dedução de Z a partir das premissas $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_{k-1}^*$, ou seja,

$X_1^*, X_2^*, ..., X_{k-1}^* \vdash Z$

Se repetirmos o procedimento n-1 vezes para cada uma das premissas chegamos à:

$\vdash Z.$

Ou seja, Z é teorema de S.

Temos então, que se Z é uma tautologia, então Z é teorema de S, ou seja, se Z é uma tautologia, então existe uma demonstração de Z em S.

Uma das formas que se abrevia a Completude na literatura especializada é:

$$\vDash Z \Rightarrow \vdash Z$$

E com a Correção mostrada na lição A Correção de S, temos:

$$\vdash Z \Leftrightarrow \vDash Z$$

Chegamos então a um importante resultado de que, na nossa conceitografia (o sistema S), toda fórmula que demonstramos é sempre verdadeira (tautologia), mais ainda, demonstramos toda fórmula que é sempre verdadeira (tautologia).

A COMPLETUDE INFERENCIAL DE S

Vamos, nesta lição, mostrar que o sistema de dedução natural S definido anteriormente é inferencialmente completo (cf. a lição As Noções de Correção e Completude de um Sistema Formal).

Completude Inferencial. Se o argumento com premissas $X_1, X_2, \ldots, X_k$ e conclusão Y é válido, então $X_1, X_2, \ldots, X_k \vdash Y$ (existe dedução em S de Y a partir das premissas $X_1, X_2, \ldots, X_k$).

Com efeito, vimos, na lição O Método da Condicional Associada, que se o argumento com premissas $X_1, X_2, \ldots, X_k$ e conclusão Y é válido, então sua condicional associada $(X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_k) \rightarrow Y$ é uma tautologia. Se $(X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_k) \rightarrow Y$ é tautologia, então, devido a Completude de S, existe uma demonstração de Y em S. Considere então uma dedução que com premissas $X_1, X_2, \ldots, X_k$:

1. X_1 Premissa

2. X_2 Premissa

3. X_3 Premissa

…,

k. X_k Premissa

k+1. $(X_1 \wedge X_2)$ C 1,2

k+2. $((X_1 \wedge X_2) \wedge X_3)$ C k+1, 3

k+3. $(((X_1 \wedge X_2) \wedge X_3) \wedge X_4)$ C k+2, 4

⋮

k+k-1. $(\ldots((X_1 \wedge X_2) \wedge X_3)\ldots \wedge X_k)$ C k+k-2, k

⋮ (aqui entra a demonstração, com m linhas, da tautologia abaixo, que existe, devido a Completude de S)

k+k-1+m. $(X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_k) \rightarrow Y$

k+k+m. Y MP k+k-1, k+k-1+m

Logo, se o argumento com premissas $X_1, X_2, \ldots, X_k$ e conclusão Y é válido, então $X_1, X_2, \ldots, X_k \vdash Y$ (existe dedução em S de Y a partir das premissas $X_1, X_2, \ldots, X_k$).

Na literatura especializada, uma das formas de escrever a completude inferencial é:

$$X_1, X_2, \ldots, X_k \vDash Z \;\Rightarrow\; X_1, X_2, \ldots, X_k \vdash Z$$

E com a Correção Inferencial mostrada na lição A Correção Inferencial de S, temos:

$$X_1, X_2, \ldots, X_k \vdash Z \;\Leftrightarrow\; X_1, X_2, \ldots, X_k \vDash Z$$

Com isso, chegamos ao importante resultado de que, na nossa conceitografia (o sistema S), toda dedução constitui uma inferência válida e, mais ainda, existe uma dedução em S para toda inferência válida.

OUTRAS LÓGICAS[8]

Antes de tratarmos de outras lógicas, ou ainda, de outras formas de raciocínio, retomemos o que vimos sobre a forma de raciocino até aqui considerada.

Vimos, até aqui:

(1) uma teoria formal, ou sistema formal, o sistema S, no qual podemos expressar deduções, demonstrações e teoremas;

(2) que, ao sistema S, podemos atribuir uma semântica (de tabelas-verdades) em que cada sentença (fórmula):

(1.1) é verdadeira (V) ou falsa (F);

(1.2) não pode ser verdadeira (V) e falsa (F) ao mesmo tempo;

(1.3) e cada sentença ou é uma sentença elementar (letras sentenciais) ou é uma combinação destas por meio de conectivos vero-funcionais, isto é, termos que expressam relações cujo valor-verdade é função do valor-verdade de suas componentes;

(3) que, em S:

(3.1) os teoremas de S são exatamente as fórmulas que são sempre verdadeiras (tautologias), conforme os resultados de Correção e Completude; e

(3.2) as inferências válidas são exatamente aquelas para as quais existe uma dedução, conforme os resultados de Correção Inferencial e Completude Inferencial.

Usamos, com frequência, raciocínios em que proposições são consideradas ou verdadeiras ou falsas, em especial, quando buscamos um conhecimento que expõe o que ocorre (V) em oposição ao que não ocorre (F). Vimos ainda como as relações entre essas proposições podem ser expressas por conectivos vero-funcionais. Devido a esses fatores, a forma de raciocínio descrita pelo sistema S é chamada de **Lógica Proposicional Clássica**.

Nesse sentido, os itens acima listados nos mostram que o sistema S expressa correta e completamente a Lógica Proposicional Clássica, lembrando ainda de que existem outros sistemas formais que expressam de forma correta e completa a Lógica Proposicional Clássica; neste caso, esses sistemas são equivalentes entre si, bem como equivalentes ao sistema S, já que têm o mesmo conjunto de teororemas (tautologias) e o mesmo conjunto de deduções (aquelas que expressam argumentos válidos).

Nesse sentido, podemos entender o porquê as "leis de pensamento" ou "princípios" abaixo são considerados fundamentais e porque a linguagem e os sistemas vistos até aqui são adequados para expressá-los.

- Princípio da Não-Contradição: $\sim(X\wedge\sim X)$.
- Princípio do 3º Excluído: $X\vee\sim X$.
- Princípio da bivalência: $X\vee\vee\sim X$ (que é uma conjunção dos dois princípios acima).
- Princípio(s) da Identidade: $X\rightarrow X$ e $X\leftrightarrow X$.

[8] Recomendação de Leitura: Mortari, 2001, Cap. 18 (do qual foi retirado boa parte da discussão sobre lógicas não clássicas feita aqui).

Lógicas Não-Clássicas

Podemos conceber, como veremos a seguir, outras formas de raciocínio, além da clássica descrita acima. Essas formas de raciocínio são chamadas de não-clássicas e o seu estudo é chamado de Lógicas Não-Clássicas. Grosso modo, podemos dividi-las como abaixo.

- Lógicas Complementares ou Ampliadas ou Estendidas (se elas admitem mais princípios que os clássicos).

- Lógicas Alternativas ou Heterodoxas (se não admitem alguns dos princípios clássicos ou propõe outros contrários).

Notemos que essa divisão não é exaustiva, pois podemos ter uma lógica que, por um lado, admite mais princípios que os clássicos e, por outro, deixa de admitir algum(ns) deles. Vejamos, a seguir, alguns exemplos de lógicas não-classicas.

OUTRAS LÓGICAS – LÓGICAS POLIVALENTES

A LÓGICA TRIVALENTE DE KLENNE

Vimos que, pelo Princípio da Bivalência, uma proposição dever ser considerada ou verdadeira ou falsa, temos assim apenas dois valores-verdades possíveis: V ou F.

Mas será que essa é a única forma de raciocínio válida? Será que podemos admitir uma outra forma válida de raciocínio, com mais de dois valores-verdade possíveis? Essas questões nos leva a consideração das Lógicas Polivalentes (Poli = muitos; Polivalentes = muitos valores-verdade).

Comecemos considerando uma lógica com três valores verdade para qualquer proposição X:

V – Sabemos que X é verdadeira;

F – Sabemos que X é falsa;

I – Não sabemos o valor-verdade de X

Exercício. A partir da tabela-verdade dos conectivos clássicos, preencha a tabela-verdade abaixo.

X	~X
V	F
I	I
F	V

X	Y	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \rightarrow Y$
V	V	V		
V	I		V	
V	F			F
I	V	I		
I	I		I	
I	F			I
F	V	F		
F	I		I	
F	F			V

Notemos então que, nessa nova lógica, não existem tautologias. Com efeito, sempre que todas as componentes de uma fórmula têm valor I, o resultado da fórmula é I; logo, dada uma fórmula qualquer, ela terá valor-verdade I na linha em que todas as suas letras sentenciais são I. Logo, também não há um sistema formal para expressar tautologias.

Veremos, mais adiante, que existem questões lógico-matemáticas, com apenas duas soluções possíveis, digamos S1 e S2, tais que, para qualquer algoritmo:

(1) se a resposta à questão é S1, o algoritmo chega a essa resposta;

(2) se a resposta à questão é S2, o algoritmo não chega a uma resposta.

O diagrama abaixo representa uma situação deste tipo:

↗ S1 → o algoritmo chega a essa resposta

Questão → Resposta ou

↘ S2 → o algoritmo não chega a uma resposta

Podemos ver então, como propôs o lógico e matemático Stephen C. Kleene (1909 – 1994), que o valor I, discutido anteriormente, pode expressar a indecidibilidade lógico-matemática (notemos então que I expressa o caso (2) acima, enquanto que V e F são relativos ao caso (1), no qual a questão tem uma resposta).

A Lógica Trivalente de Łukasiewicz

A Lógica acima representa o caso em que I indica a ignorância a respeito do valor-verdade clássico de X. Podemos também considerar uma lógica trivalente na qual, para qualquer proposição X, temos:

V – X é verdadeira;

F – X é falsa;

I – X é indeterminada ontologicamente (ou seja, não é que X é V ou F e não sabemos, mas X é indeterminada de fato; I é um valor-verdade ontologicamente tão legitimo quanto os outros dois, V ou F).

Uma lógica desse tipo foi proposta pelo lógico polonês Jan Łukasiewicz (1878-1956), chamada de $Ł_3$ (3 devido aos três valores-verdades), para tratar da **questão dos futuros contingentes**.

Com efeito, notemos que o Princípio da Bivalência leva a considerar que ocorre uma asserção sobre um evento futuro ou ocorre a sua negação.

Mas o futuro não é contingente? Como podemos já o considerar como determinado?

Nesse sentido, Łukasiewicz introduziu as interpretações abaixo dos conectivos, considerando que os eventos futuros são ontologicamente indeterminados.

X	~X
V	F
I	I
F	V

X	Y	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \rightarrow Y$
V	V	V	V	V
V	I	V	I	I
V	F	V	F	F
I	V	V	F	V
I	I	I	I	V*
I	F	I	F	I
F	V	V	F	V
F	I	I	F	V
F	F	F	F	V

Notemos que a tabela-verdade acima é quase idêntica à estudada anteriormente; a única diferença (indicada por *) é que I → I é V, ou seja, temos que é verdadeiro que o ontologicamente indeterminado (I) implique o ontologicamente indeterminado (I).

Notemos que nessa lógica, temos tautologias, como a fórmula X → X.

Na medida em que as fórmulas que são tautologias dessa lógica tem que ser verdadeiras para todas as linhas das tabelas-verdades, inclusive para as linhas que tem apenas valores-verdade clássicos (V ou F), então as tautologias dessa lógica são também tautologias clássicas. Entretanto, o inverso não ocorre, ou seja, nem toda tautologia clássica é tautologia dessa lógica, como podemos ver do exercício abaixo. Ter uma implicação é condição necessária para que uma tautologia clássica seja uma tautologia nessa lógica, isso pode ser interpretado no sentido de que fórmulas são sempre verdadeiras apenas se expressar uma relação hipotética entre proposições, pois, no futuro as proposições não estão determinadas, apenas suas relações de implicação.

Exercício. Faça as tabelas-verdades das fórmulas abaixo.

(1) $X \rightarrow X$	(2) $X \vee \sim X$	(3) $\sim(X \wedge \sim X)$
(4) $(X \rightarrow \sim X)$	(5) $(\sim X \rightarrow X)$	(6) $(X \rightarrow \sim X) \wedge (\sim X \rightarrow X)$

Veja que, em $Ł_3$: vale o Princípio da Identidade (pois ele é sempre verdadeiro, conforme o item (1)); não vale o Princípio do 3º Excluído (pois ele não é sempre verdadeiro, conforme o item (2); não vale o Princípio da Não-Contradição (pois ele não vale para os eventos futuros, isto é, quando X é I, conforme o item (3)); e a fórmula do item (6) permite expressar o indeterminado em nossa linguagem artificial pois essa formula é V quando X é I, e é F em todos os outros casos.

Notemos que, se $X \rightarrow Y$ e X são ambas V (primeira linha da tabela-verdade acima do conectivo $\rightarrow$), então Y é verdadeira. Ou seja, vale a regra Modus Ponens.

Exercício. Mostre que são tautologias: (1) $(X \wedge Y) \rightarrow X$; e (2) $X \rightarrow (X \vee Y)$

Em 1931, M. Wajsberg mostrou que se definirmos as fórmulas $X \vee Y :=_{def.} ((X \rightarrow Y) \rightarrow Y)$, $X \wedge Y :=_{def.} \sim(\sim X \vee \sim Y)$ e $X \leftrightarrow Y :=_{def.} (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$, temos o seguinte sistema formal para $Ł_3$.

Axiomas para $Ł_3$:

$(X \rightarrow Y) \rightarrow ((Y \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Z))$

$(\sim X \rightarrow \sim Y) \rightarrow (Y \rightarrow X)$

$((X \rightarrow \sim X) \rightarrow X) \rightarrow X$

Regra de Inferência para $Ł_3$: Modus Ponens

LÓGICAS N-VALENTES E LÓGICAS DIFUSAS

Por fim, notemos que podemos considerar lógicas com n valores-verdade, chamadas de lógica n-valentes. Por exemplo, Łukasiewicz propôs uma sequência de lógicas $Ł_n$ tal que cada $Ł_n$ é uma lógica n-valente. Podemos ainda considerar uma lógica infinito-valente (como também propôs Łukasiewicz), na qual cada proposição tem um valor-verdade que é um número entre 0 e 1; 0 indicando o valor-verdade Falso e 1 o valor-verdade Verdadeiro. Umas das interpretações possíveis de tal lógica seria a probabilista, na qual, por exemplo, se o valor da proposição A é 0,50, então A tem a probabilidade de 50% de ocorrer.

Consideremos ainda a seguinte questão: qual o mínimo número de grãos de arroz são necessários para se fazer um monte de arroz?

Notemos que se:

(1) um grão de arroz não é um monte de arroz; e

(2) se n grãos de arroz não são um monte de arroz, então n+1 grãos de arroz não são um monte de arroz;

então não exite um monte de arroz. Com efeito: um grão não é um monte de arroz; dois grãos não são um monte de arroz, três grãos não são um monte de arroz, etc.

Uma das formas de tratar tais raciocínios, chamado de Paradoxo de Sorites, ou ainda, de tratar, com conceitos imprecisos, como, por exemplo, "x é músico" (com efeito, quando diríamos que x é músico é verdadeira ou falsa?), é supor que o valor-verdade da sentença "n grãos de arroz são um monte de arroz" é difuso, ou seja, não é apenas V ou F, mas, por exemplo, é um número entre 0 e 1. O estudo de tais formas é chamado de Lógica Fuzzy ou Difusa e foi proposta por Lotfi Askar Zadeh, nascido em 1921 (para uma breve introdução à Lógica Difusa, veja Feitosa e Paulovich 2005, Apêndice)

Outras lógicas – Lógicas da Relevância e Paraconsistentes

Lógica da Relevância

Vimos (na lição A Implicação Material e seus Paradoxos) que existem sentenças que contém implicações materiais e que parecem contradizer a noção intuitiva de implicação expressa por "se … então _", ou seja, os chamados Paradoxos da Implicação Material.

Por exemplo, sentenças da forma $(X \to Y) \vee (Y \to Y)$ são tautologias, como:

Se chove no Brasil, então chove no Japão, ou, se chove no Japão, então chove no Brasil.

Considerando, deduções, vimos, por exemplo, que deduções da forma $X \vdash Y \to X$ são válidas (Regra da Prefixação), como:

Chove no Brasil. Logo, se chove no Japão, então chove no Brasil.

Analisemos a dedução $X \vdash Y \to X$ na Lógica Clássica. Vamos colocar na frente de cada fórmula o índice da premissa ou hipótese da qual ela depende (quando ela for uma premissa ou hipótese, colocamos o próprio número dela na frente)

1. X Premissa
2. | Y Hipótese {2}
3. | X Rep 1 {1}
4. Y → X DC 3-6 {1}

Notemos que a dedução que permite a aplicação da regra DC começa na fórmula 2 (hipótese) e termina na fórmula 3, mas a fórmula 3 não foi inferida a partir de 2.

A pesquisa de sistemas lógicos que superassem tais paradoxos deu origem a Lógica da Relevância. De forma breve, podemos dizer que, segundo a Lógica da Relevância, devemos considerar que existe uma implicação quando as premissas são relevantes para a conclusão.

$$X \to (Y \to Z) \vdash Y \to (X \to Z)$$

1. A → (B → C) Premissa {1}
2. | B Hipótese {2}
3. | | A Hipótese {3}
4. | | B → C MP 1,3 {1,3} Notar que para chegar em C precisamos de 1 e 3 acima.
5. | | C MP 2,4 {1,2,3} Notar que para chegar em C precisamos de 1, 2 e 3 acima.
6. | A → C DC 3-5
7. B → (A → C) DC 2-6

1. X → Y Premissa {1}
2. Y → Z Premissa {2}
3. | X Hipótese {3}
5. | Y MP 1,3 {1,3}
6. | Z MP 2,5 {1,2,3}
7. X → Z DC 3-6 {1,2}

Para exemplificar a noção de relevância, considere a dedução $(X \to Y), (Y \to Z) \vdash (X \to Z)$. Vamos, na frente de cada fórmula da dedução colocar o conjunto dos índices das premissas ou hipóteses que são relevantes para a sua dedução. Assim, por exemplo, na dedução abaixo, o conjunto {1,3} indica que fórmulas 1 (premissa) e 3 (hipótese) são relevantes para a obtenção da fórmula 5.

1. $X \rightarrow Y$ Premissa {1}
2. $Y \rightarrow Z$ Premissa {2}
3. | X Hipótese {3}
5. | Y MP 1,3 {1,3}
6. | Z MP 2,5 {1,2,3}
7. $X \rightarrow Z$ DC 3-6 {1,2}

Notemos então que, para que a dedução seja relevante, só podemos aplicar a regra DC se a hipótese da regra (no caso, fórmula 3) é relevante para a fórmula logo anterior à conclusão da regra DC (fórmula 6; no caso, a hipótese é relevante para ela). Notemos também que a conclusão da regra DC (no caso, fórmula 7) não depende da sua hipótese (fórmula 2).

Notemos então que a hipótese (fórmula 2) não é relevante para última fórmula antes da conclusão da Regra DC (fórmula 3), assim, segundo a Lógica da Relevância, não podemos aplicar a Regra DC.

Qual sistema formal é então correto e completo em relação a essa noção de relevância?

Se o único conectivo da linguagem for a implicação "$\rightarrow$", um sistema correto e completo é aquele que tem a Regra Modus Ponens e os quatro esquemas de axiomas:

(1) $X \rightarrow X$

(2) $[X \rightarrow (Y \rightarrow Z)] \rightarrow [Y \rightarrow (X \rightarrow Z)]$

(3) $(Y \rightarrow Z) \rightarrow [(X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z)]$

(4) $[X \rightarrow (Y \rightarrow Z)] \rightarrow [(X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z)]$

No caso da Lógica da Relevância, os outros conectivos não podem ser definidos a partir da implicação e da negação, como no caso da Lógica Clássica.

Obtemos um sistema correto e completo envolvendo os demais conectivos adicionando os seguintes esquemas de axiomas:

(5) $(X \wedge Y) \rightarrow X$

(6) $(X \wedge Y) \rightarrow Y$

(7) $[(X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow Z)] \rightarrow [X \rightarrow (Y \wedge Z)]$

(8) $X \rightarrow (X \vee Y)$

(9) $Y \rightarrow (X \vee Y)$

(10) $[(X \rightarrow Z) \wedge (Y \rightarrow Z)] \rightarrow [(X \vee Y) \rightarrow Z]$

(11) $[X \wedge (Y \vee Z)] \rightarrow [(X \wedge Y) \vee Z]$

(12) $(X \rightarrow \sim X) \rightarrow \sim X$

(13) $(X \rightarrow \sim Y) \rightarrow (Y \rightarrow \sim X)$

(14) $\sim\sim X \rightarrow X$

Os sistema formais para a Lógica da Relevância, já no caso proposicional, não são decidíveis, ou seja, diferente da Lógica Clássica em que existe um algoritmo para determinar seus teoremas (que são exatamente as tautologias, então, por exemplo, a tabela-verdade é um tal algoritmo), demonstrou-se que não existe um algoritmo que determine os teoremas da Lógica da Relevância.

Exercícios.

(1) Avalie o PI e mostre que ele é pode ser obtido por Demonstração Condicional respeitando a relevância (dica: veja a demonstração feita anteriormente, no Sistema S, e analise a relevância da hipótese para cada fórmula colocando o conjunto de índices como feito no início desta seção).

(2) Mostre que os axiomas de (1) a (4) podem ser demonstrados usando a Demonstração Condicional respeitando a relevância (coloque na frente da cada fórmula o conjunto de índices das hipóteses relevantes para ela).

Lógicas Paraconsistentes

Uma característica interessante das lógicas da relevância é que nelas não vale a Regra Ex Contradictione Quodlibet vista anteriormente: X, ~X ⊢ Y.

A ideia aqui é que, neste caso, X não é relevante para a dedução da premissa Y.

Notemos então que nas lógicas da relevância valem menos princípios que no caso da Lógica Clássica, por exemplo, na Lógica da Relevânica não vale as Regras Ex Contradictione Quodlibet e Prefixação.

Lógicas para as quais não vale a Regra Ex Contradictione Quodlibet são chamadas de Lógicas Paraconsistente.

As Lógicas Paraconsistentes são importantes no Brasil, pois nosso lógico mais famoso Newton Carneiro Affonso da Costa foi um dos pioneiros do estudo desses sistemas no mundo.

OUTRAS LÓGICAS – LÓGICAS ESTENDIDAS

LÓGICAS MODAIS

Nessas lógicas, estendemos a linguagem com novos símbolos, como, por exemplo, os da tabela abaixo.

	Operadores	Exemplo
Lógicas Aléticas [de ἀλήθεια]	□: É necessário que ◊: É possível que	□X: É necessário que X ◊X: É possível que X
Lógicas Deônticas [de Deontologia]	O: É obrigatório P: É permitido	OX: X é obrigatório PX: X é permitido
Lógicas Epistêmicas	K: Sabe-se que B: Acredita-se que	KX: Sabe-se que X BX: Acredita-se que X
Lógicas Temporais	F: No futuro, será o caso que P: No passado, foi o caso que H: Foi sempre o caso que G: Será sempre o caso que	FX: Ocorrerá X PX: Ocorreu X HX: Foi sempre o caso que X GX: Será sempre o caso que X

Exemplo. Na lógica temporal temos:

Teoremas:

$GX \rightarrow FX$ (Se será sempre o caso que X, então, no futuro, será o caso que X)

$HX \rightarrow PX$ (Se foi sempre o caso que X, então, no passado, foi o caso que X)

Regra de Inferência:

$X \vdash FPX$ (ocorre X; logo, no futuro, será o caso que, no passado, foi o caso que X)

Notemos que os operadores acima não podem ser definidos simplesmente em função do valor-verdade da sentença X; por exemplo, se □X é V (X é necessário), então X é V; mas, não é o caso de que se X é V, então □X é V (X é necessário), pois X pode ser uma verdade contingente, como chove (quando está chovendo). Por isso tais operadores são chamados de **operadores intensionais**, em oposição aos operadores extensionais ou vero-funcionais, como os conectivos.

Uma propriedade interessante nas lógicas aléticas e deônticas é a Dualidade:

$$\sim\Box\sim X \leftrightarrow \Diamond X \qquad \sim O \sim X \leftrightarrow PX$$

$$\sim\Diamond\sim X \leftrightarrow \Box X \qquad \sim P \sim X \leftrightarrow OX$$

Semântica de Mundos Possíveis ou Semântica de Kripke (inspirada em Leibniz).

Consideremos, como abaixo, três mundos possíveis, w_1, w_2 e w_3, nos quais, respectivamente, são verdades {A}, {B} e {A, B}. As setas indicam a chamada **relação de acessibilidade** entre os mundos; nesse sentido: w_1 "enxerga" w_1, w_2 e w_3; w_2 "enxerga" w_3; e, w_3 "enxerga" só a si próprio.

[Desenho]

Nessa interpretação, podemos definir:

$\Box X$ em um mundo w se, e somente se, X é V em todos os mundos acessíveis a w; e

$\Diamond X$ em um mundo w se, e somente se, X é V em algum mundo acessível a w.

Exercício. Determine se ??

Quais seriam os axiomas para a Lógica Modal? Por exemplo, será que $\Box X \rightarrow \Box\Box X$ (se X é necessário, então é necessário que X seja necessário)?

Vemos assim que várias noções de necessidade e possibilidade lógicas podem ser consideradas (e estudadas), em função dos axiomas propostos, como os abaixo.

K: $\Box(X \rightarrow Y) \rightarrow (\Box X \rightarrow \Box Y)$

T: $\Box X \rightarrow X$

4: $\Box X \rightarrow \Box\Box X$

5: $\Diamond X \rightarrow \Box\Diamond X$

Notemos que como $\Diamond X = {\sim}\Box{\sim} X$, os axiomas acima também definem axiomas para o possível $\Diamond$, chamados de **<u>axiomas duais</u>** (que não trataremos aqui).

Notemos também que, usualmente, a lógica proposicional subjacente é a clássica (por isso essas lógicas modais são chamadas de estendidas), logo, toda tautologia deve ser teorema de nosso sistema axiomático proposto (assim, temos outras axiomas e regras de inferência que garantem a demonstração de todas as tautologia, como as do sistema S visto anteriormente).

Também, nos sistemas chamados normais, admitimos a seguinte regra de inferência (se X é teorema; logo, X é necessário).

Regra de necessitação:

$\vdash X$

_____

$\vdash \Box X$

A combinação dos axiomas acima constitui diversos sistema modais como os abaixo (considerados na literatura da área).

Sistemas:

KD = **K** + D

T = **K** + T

B = **T** + B = **K** + T + B

S4 = **T** + 4 = **K** + T + 4

S5 = **T** + 5

Lógica temporal também pode usar essa semântica: relação de acessibilidade é transitiva (isto é, se x é acessível a y e y a z, então x é acessível a z). Em geral, axiomas determinam propriedades da relação de acessibilidade. Por exemplo, a semântica de mundos possíveis nas quais valem os axiomas T e 4 são aquelas em que as relações de acessibilidade tem, respectivamente, a propriedade reflexiva (isto é, todo mundo é acessível a si próprio) e transitiva.

A ANÁLISE INTRA-SENTENCIAL

Para entendermos a necessidade da análise intra-sentencial, consideremos o argumento:

Todo homem é mortal.

Ora, Sócrates é homem.

Logo, Sócrates é mortal.

O argumento acima sem dúvida é um argumento válido, pois, se suas premissas são admitidas como verdadeiras, então sua conclusão tem que ser admitida como verdadeira. Mais ainda, isso se dá devido a sua forma:

Todo H é M.

Ora, a é H.

Logo, a é M.

Notemos, porém, que o argumento é válido devido à forma de composição dos termos e não devido a forma de composição de sentenças, pois, se fizermos a análise do argumento acima com o que estudamos até agora, como todas as sentenças que compõe o argumento são sentenças simples e diferentes entre si, obtemos:

$$\frac{\begin{array}{c}A\\B\end{array}}{C}$$

que não é um argumento válido, já que o valor de C na formalização não depende em nada do valor de A e B.

Daí a necessidade de um novo instrumental para analisar a validade dos argumentos como acima. É o que vamos fazer nessa nova parte.

Para esse estudo, vamos introduzir uma nova linguagem artificial, chamada de linguagem de primeira ordem. A nossa linguagem será composta de:

1. Constantes Individuais
2. Variáveis Individuais
3. Predicados n-ários
4. Quantificadores
5. Conectivos (já vistos anteriormente)

Vejamos, nas lições a seguir, o que constitui cada um desses elementos.

ANÁLISE INICIAL DA PROPOSIÇÃO: CONSTANTES, VARIÁVEIS E PREDICADOS

Como na Lógica Proposicional, vamos usar um sistema de signos para representar (abstratamente) e analisar as possíveis formas de relações entre os termos.

Assim, comecemos com a questão: como formalizar a sentença a seguir?

Sócrates é homem

Podemos, por exemplo, usar o signo "a" para designar Sócrates e o signo "H" para designar mortal. Assim, a sentença acima fica:

a é H

Vamos então analisar o significado de cada um desses termos.

Quanto ao signo "a", sabemos o que ele designa: o próprio indivíduo Sócrates que viveu na Grécia Antigua. Assim, temos uma importante classe de termos, definida a seguir.

Definição. Um signo usado para indicar um indivíduo determinado é chamado de **constante individual**.

O termo "constante" indica que, durante nossa análise, tal signo sempre nomeará o indivíduo considerado, ou seja, não haverá mudança do indivíduo que é designado por esse signo.

Notação. Como constantes individuais, vamos letras minúsculas do início do alfabeto: a, b, c etc.

Exemplos. a = Sócrates; b = Platão; e c = Zeus.

E quanto ao signo "H"?

Em geral, em Filosofia, se diz que H designa um universal. Mas o que significa isso de um ponto de vista lógico-matemático?

Para investigar o sentido de "H", vamos substituir, na sentença inicial, o termo "Sócrates" por um termo variável "x", que indica a possibilidade de substituir "x" por qualquer termo determinado. Assim temos:

x é homem

Definição. Um signo usado para indicar um indivíduo indeterminado é chamado de **variável individual**.

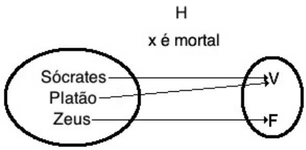
O termo "variável" indica que tal signo não designa um indivíduo determinado, mas pode ser substituído por qualquer constate individual.

Notação. Como variáveis individuais, vamos usar letras minúsculas do final do alfabeto: x, y, z.

Notemos então que a expressão "x é homem" acima não é nem verdadeira nem falsa, mas será verdadeira ou falsa ao substituirmos "x" por uma constante individual:

	↗	a é homem = Sócrates é homem = V
x é homem	→	b é homem = Platão é homem = V
	↘	c é homem = Zeus é homem = F
	↘	etc.

Assim, o termo "homem" ou, como usamos acima, o signo "H", podem ser vistos como designando uma função que leva objetos à proposições, ou ainda, aos valores-verdades V ou F.



Notação. Em correlação com a notação das funções matemáticas, vamos escrever

H(x)

para denotar

x é homem.

Assim, temos que

H(x) = x é homem

H(a) = Sócrates é homem = V

H(b) = Platão é homem = V

H(c) = Zeus é homem = F

De forma geral temos

Definição. Um signo usado para indicar um universal é chamado de **predicado**.

Notação. Vamos usar como predicados as letras maiúsculas: A, B, C, …, Z.

Exemplos. H = homem; M = mortal; e F = filósofo.

Podemos agora expressar uma proposição em nossa linguagem:

As expressões H(a), H(b) e H(c) acima designam, respectivamente,

Sócrates é homem, Platão é homem e Zeus é homem.

Começamos então a ter os elementos necessários para definir as fórmulas de nossa nova linguagem. Notemos que se **X** é um predicado e **t** é um termo (isto é, uma constante individual ou uma variável individual), então **X**(**t**) é uma fórmula.

DIGRESSÃO: O CONCEITO

Conceito (designado por um predicado)

↗ **Compreensão**: aquilo que permite distinguir entre aplicação e não aplicação do conceito

- Conceito ≠ Imagem
- Conhecimento Conceitual ≠ "Conhecimento" Imagético
- Conhecimento Conceitual ≠ Mito

↘ **Extensão**: conjunto-verdade

De uma forma bem geral, notar que se estabelecêssemos a compreensão dos predicados "x é belo" ou "x é bom", teríamos resolvido, por exemplo, os principais problemas da estética ou da ética.

PREDICADOS N-ÁRIOS

Notemos que as relações também podem receber o mesmo tratamento que fizemos anteriormente.

Considere a sentença:

Sócrates é mestre de Platão.

Da mesma forma que antes, podemos substituir "Sócrates" e "Platão" por variáveis individuais obtendo:

x é mestre de y

Notemos que essa expressão também não é nem verdadeira nem falsa, mas será verdadeira ou falsa ao substituirmos "x" e "y" por constantes:

	↗	a é mestre de b = Sócrates é mestre de Platão = V
x é mestre de y	→	b é mestre de a = Platão é mestre de Sócrates = F
	↘	a é mestre de c = Sócrates é mestre de Zeus = F
	↘	etc.

Assim, também o termo "mestre" pode ser visto como uma função: só que, diferente dos predicados anteriormente analisados, "mestre" leva **pares de indivíduos** à proposições, ou ainda, aos valores-verdades V ou F.

Notação. Em correlação com a notação matemática, vamos escrever

M(x,y) ou xMy

para denotar

x é mestre de Y.

Assim, temos que

M(x,y) = xMy = x é mestre de y

M (a, b) = aMb = a é mestre de b = Sócrates é mestre de Platão = V

M (b, a) = bMa = b é mestre de a = Platão é mestre de Sócrates = F

M (a, c) = aMc = a é mestre de b = Sócrates é mestre de Zeus = F

etc.

Notemos que a relação "mestre" acima pode ser vista como um predicado definidos para dois elementos; por isso relações entre dois elementos são chamados **predicados binários**.

Da mesma forma, relações entre três elementos, como, por exemplo, x ensinou y a z, são chamadas **predicados ternários**. Podemos continuar, considerando n elementos, como abaixo.

Definição. Um signo usado para designar uma relação entre n elementos é chamado de **predicado n-ário**.

Notação. Como para predicados unários, vamos usar como predicados n-ários as letras maiúsculas: A, B, C, ..., Z.

Exemplos. M(x,y) = x é mestre de y; E(x,y,z) = x ensinou y a z; F(x) = x é filósofo.

Notemos, então que se **X** é um predicado n-ário e $\mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n$ são termos (isto é, constantes individuais ou variáveis individuais), então $\mathbf{X}(\mathbf{t}_1,\dots,\mathbf{t}_n)$ é uma fórmula.

QUANTIFICADORES

Vimos, nas lições anteriores, elementos que constituem nossa linguagem artificial: constantes individuais, variáveis individuais, predicados n-ários. já vimos, na Parte 1 de nosso Curso, os conectivos. O último tipo de elemento que falta são os quantificadores. Com os quantificadores poderemos asserir, em termos de nenhum, algum ou todos, **quantos** indivíduos de determinado domínio de discurso, por exemplo, tem certo predicado.

O QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

Consideremos a fórmula atômica F(x) a que atribuiremos o significado: x é filósofo.

(Lembremos que, como vimos anteriormente, essa expressão não é verdadeira, nem falsa).

Como asserir, em nossa linguagem, a partir de F(x), a proposição:

Alguém é filósofo.

Uma das formas seria F(a), significando que o indivíduo a é filósofo. Mas nesse caso, saberíamos quem é filósofo (o indivíduo a), enquanto a asserção "Alguém é mortal" não nos especifica quem é filósofo. A notação abaixo soluciona essa questão.

Notação. Escrevemos

$$\exists x\ F(x)$$

para expressar que existe um x tal que x tem o predicado F.

Assim, no caso em que F = filósofo, então ∃x F(x) expressa que existe um x tal que x é filósofo, ou de forma mais usual, existe um filósofo, ou ainda, alguém é filósofo.

Definição. O signo ∃ (um E invertido) usado na notação acima é chamado de **quantificador existencial**.

O QUANTIFICADOR UNIVERSAL

Da mesma forma, podemos asserir, em nossa linguagem, a partir de F(x), a proposição:

Todos são filósofos.

Para isso usamos a expressão abaixo.

Notação. Escrevemos

$$\forall x\ F(x)$$

para expressar que, para todo x, x tem o predicado F.

Assim, se F = filósofo, então ∀x F(x) expressa que, para todo x, x é filósofo, ou de forma mais usual, todos são filósofos.

Definição. O signo ∀ (um A invertido, da palavra alemã "allgemein" e da inglesa "all") usado na notação acima é chamado de **quantificador universal**.

LINGUAGENS DE 1ª ORDEM: SINTAXE

Explicitados todos os elementos (constantes individuais, variáveis individuais, predicados n-ários, conectivos e quantificadores) podemos definir agora as linguagens artificiais que vamos utilizar, ou seja, seus alfabetos e fórmulas.

Definição. Um **alfabeto** de uma linguagem de 1ª ordem se constitui de:

(1) Constantes Individuais: a, b, c, etc (se necessário a_1, a_2, etc).

(2) Variáveis Individuais: w, x, y, z (se necessário x_1, x_2, x_3, etc).

(3) Predicados n-ários: A, B, ..., Z (se necessário A_1, A_2, A_3, etc).

(4) Conectivos Lógicos: ~, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.

(5) Quantificadores Existencial e Universal: $\exists$ e $\forall$.

(6) Símbolos auxiliares: ( ) , (isto é, parênteses e vírgula)

Definição. Uma **expressão** de uma linguagem de 1ª ordem é qualquer seqüência finita de símbolos de seu alfabeto.

Definição. Um **termo individual** é uma constante individual ou uma variável individual.

Definição. Uma **fórmula atômica** é uma expressão com um predicado n-ário seguido de n termos individuais entre parênteses e separados por vírgula; ou seja, se **X** é um predicado n-ário e $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ são termos individuais, então $\mathbf{X}(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n)$ é uma fórmula atômica.

Definição. Uma **fórmula** é qualquer expressão definida pelas regras de composição abaixo.

1) Uma fórmula atômica é uma fórmula.

2) Se X é uma fórmula, então ~X é uma fórmula.

3) Se X e Y são fórmulas, então $(X \wedge Y)$ é uma fórmula.

4) Se X e Y são fórmulas, então $(X \vee Y)$ é uma fórmula.

5) Se X e Y são fórmulas, então $(X \rightarrow Y)$ é uma fórmula.

6) Se Y é uma fórmula e x é uma variável, então $\exists xY$ é uma fórmula.

7) Se Y é uma fórmula e x é uma variável, então $\forall xY$ é uma fórmula.

Definição. O conectivo principal de uma fórmula é último conectivo usado na sua formação.

Introduzida a parte sintática de uma linguagem de 1ª ordem, podemos agora introduzir a semântica dessa linguagem. Para isso precisamos discutir alguns aspectos em relação a extensão de predicados n-ários.

EXTENSÃO DE PREDICADOS (N-ÁRIOS)

Nas lições anteriores, vimos que um predicado pode ser interpretado como uma função que atribui um valor-verdade V ou F aos indivíduos de um domínio de discurso e, de forma geral, um predicado n-ário pode ser interpretado como uma função que atribui um valor-verdade V ou F às seqüências de n indivíduos de um domínio de discurso (Frege).

AVISO IMPORTANTE. Sempre que falarmos de predicados estaremos supondo que o predicado (n-ário) está bem definido no domínio de discurso; isto é, para cada elemento (ou seqüência de n elementos, no caso de predicados n-arios) do domínio de discurso o valor-verdade que o predicado lhe associa está bem definido.

Podemos dizer que, nesse caso, estabelecemos a **compreensão** do predicado, ou seja: aquilo que permite distinguir entre aplicação e não aplicação do predicado a um indivíduo do domínio de discurso.

Por exemplo, a compreensão do predicado "Homem" é aquilo que permite distinguir entre aplicação ou não aplicação do predicado "Homem" a um indivíduo do domínio de discurso.

O mesmo vale para predicados n-ários em geral. Por exemplo, a compreensão do predicado binário "Mestre" é aquilo que permite distinguir entre aplicação ou não aplicação do predicado "Mestre" a um par ordenado de indivíduos do domínio de discurso.

Quando o predicado (unário) está bem definido em um domínio de discurso, também está bem definida a **extensão** ou o **conjunto-verdade** do predicado, ou seja: o conjunto dos elementos a que o predicado atribui valor-verdade V.

Assim, por exemplo, no domínio de discurso D = {a, b, c} (no qual a = Sócrates, b = Platão e c = Aristóteles), a extensão ou conjunto verdade do predicado E (escritor) é

$$\{b, c\}$$

levando em consideração que Sócrates não escreveu nenhum livro.

Da mesma forma, quando um predicado n-ário está bem definido em um domínio de discurso, também está bem definida a sua **extensão** ou o seu **conjunto-verdade**, ou seja: o conjunto das seqüências de elementos a que o predicado n-ário atribui valor-verdade V.

Assim, por exemplo, no mesmo domínio de discurso D acima, temos que a extensão da relação "mestre" é o conjunto:

$$\{(a,b), (b,c)\}$$

Dado então o Aviso Importante acima e que, neste caso, as extensões ou conjunto-verdade dos predicados (n-ários) estão bem definidos, em geral, em Lógica, tratamos os predicados unários como conjuntos de elementos e os predicados n-ários como conjuntos de seqüência de n elementos.

Assim, por exemplo, se X é um predicado unário e Y um predicado n-ário, podemos dizer que:

$$X(a) \text{ é V se, e somente se, } a \in X \text{ e}$$

$$Y(a_1, \ldots, a_n) \text{ se, e somente se, } (a_1, \ldots, a_n) \in Y$$

Com isso, simplificamos a exposição da semântica de nossa linguagem, na lição a seguir.

LINGUAGENS DE 1ª ORDEM: SEMÂNTICA

Vamos agora estabelecer uma semântica para a linguagem de primeira ordem exposta na lição Linguagem de 1ª Ordem: Sintaxe. Trata-se, sobretudo, de definir: interpretação, fórmula verdadeira em uma interpretação e fórmula válida (a validade desempenha na Lógica de 1ª ordem o papel que a tautologia tem para a Lógica Proposicional).

Para definir interpretação, fórmula verdadeira em uma interpretação e fórmula válida, precisamos de algumas definições preliminares.

Definição. Em uma fórmula $\exists$**xY**, a parte **Y** é chamada de **escopo** do quantificador $\exists$**x**, e em uma fórmula $\forall$**xY**, a parte **Y** é chamada de **escopo** do quantificador $\forall$**x**.

Definição. A ocorrência da variável **x** é **livre** se não ocorre logo após um quantificador (como nas expressões "$\exists$**x**" ou "$\forall$**x**") ou não está no escopo de um quantificador $\exists$**x** ou $\forall$**x**.

Definição. Uma **sentença** é uma fórmula que não tem variável com ocorrência livre

Definição: Uma **interpretação** I para uma linguagem de primeira ordem consiste de:

1) Um conjunto não-vazio D, chamado de domínio da interpretação;

2) Para cada constante individual **a**, uma atribuição I(**a**) de algum elemento de D.

3) Para cada letra predicativa **A** uma atribuição a I(**A**) de algum conjunto de seqüência de n elementos de D.

Exemplos.

Seja L a linguagem com as constantes a, b e c, e as letras predicativas E, F (de aridade 1) e M (de aridade 2).

(1) Uma interpretação para L é

D = {Sócrates, Platão, Aristóteles},

I(a) = Sócrates, I(b) = Platão, I(c) = Aristóteles,

I(E) = {Platão, Aristóteles}, I(F) = {Sócrates, Platão, Aristóteles}, e

I(M) = {(Sócrates, Platão), (Platão, Aristóteles)}.

Notemos que, nesta interpretação, podemos ver as classes definidas por E, F e M como significando, respectivamente: escritor, filósofo, mestre de.

(2) Outra interpretação para L é

D = {1, 2, 3, 4},

I(a) = 1, I(b) = 2, I(c) = 4,

I(E) = {1, 2,3}, I(F) = {1, 3} e

I(M) = {(1,2), (2,4)}.

Vamos agora definir quando uma sentença **S** é verdadeira em uma interpretação I; para simplificar a exposição da definição, vamos introduzir a definição e a notação abaixo.

Definição. Dada uma interpretação I de domínio D de para uma linguagem de primeira ordem L, denotamos por **L(D)** a linguagem que além dos símbolos de L tem, para cada elemento de D, uma constante associada a ele.

Notação: Escrevemos $\models_I$ **S** para denotar que a sentença **S** é verdadeira em I, e $\not\models_I$ **S** para denotar que **S** não é verdadeira em I.

Definição. $\models_I$ **S** (por indução a partir das regras de composição da fórmula **S**)

1) $\models_I \mathbf{A}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ se, e somente se, $(I(\mathbf{a}_1), \ldots, I(\mathbf{a}_n)) \in I(\mathbf{A})$;

2) $\models_I \sim\mathbf{X}$ se, e somente se, $\not\models_I \mathbf{X}$;

3) $\models_I \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ se, e somente se, $\models_I \mathbf{X}$ e $\models_I \mathbf{Y}$;

4) $\models_I \mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ se, e somente se, $\models_I \mathbf{X}$ ou $\models_I \mathbf{Y}$;

5) $\models_I \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ se, e somente se, $\not\models_I \mathbf{X}$ ou $\models_I \mathbf{Y}$;

6) $\models_I \exists\mathbf{x}\mathbf{Y}$ se, e somente se, $\models_I \mathbf{Y}(\mathbf{x}/\mathbf{a})$ para toda constante individual **a** em L(D); **Y**(**x**/a) é a fórmula que resulta de **Y** pela substituição das ocorrências livres da variável **x** pela constante **a**.

7) $\models_I \forall\mathbf{x}\mathbf{Y}$ se, e somente se, $\models_I \mathbf{Y}(\mathbf{x}/\mathbf{a})$ para alguma constante individual **a** em L(D); **Y**(**x**/a) é a fórmula que resulta de **Y** pela substituição das ocorrências livres da variável **x** pela constante **a**.

Exercícios.

(1) Na interpretação dada no exemplo (1) acima verifique se:

(a) $\models_I$ E(b) (b) $\models_I$ E(a) (c) $\models_I$ M(b,c) (d) $\models_I$ ~E(a) (e) $\models_I$ ~E(b)
(f) $\models_I$ E(b) $\wedge$ M(b,c) (g) $\models_I$ E(a) $\wedge$ E(b) (h) $\models_I$ E(a) $\vee$ E(b) (i) $\models_I$ E(a) $\rightarrow$ E(b) (j) $\models_I$ $\exists$x E(x)
(k) $\models_I$ $\forall$x E(x) (l) $\models_I$ $\forall$x F(x) (m) $\models_I$ $\exists$x ~F(x)

(2) Formalize, nessa nova linguagem, as sentenças:

(a) Algum filósofo é escritor (b) Algum filósofo não é escritor

(c) Todo filósofo é escritor (d) Nenhum filósofo é escritor

Definição: Um **modelo** para um conjunto de fórmula é uma interpretação em que cada fórmula do conjunto é verdadeira.

Definição: Um **contramodelo** para uma fórmula é uma interpretação na qual ela é falsa.

Definição: Uma sentença é **válida** se é verdadeira em toda interpretação.

Podemos estender a noção de validade para uma fórmula qualquer (e não apenas para sentenças).

Definição: Uma fórmula é **válida** se e somente se:

(1) é uma sentença verdadeira em toda interpretação ou,

(2) caso tenha variáveis livres, se é verdadeira a sentença obtida quantificando universalmente todas as suas variáveis livres.

Vemos então que a validade desempenha na Lógica de 1ª ordem o papel que a tautologia tem para a Lógica Proposicional.

Com essas definições, estabelecemos de forma precisa uma semântica para as linguagens de 1ª ordem. Temos então uma linguagem cujo uso implica que identifiquemos os indivíduos e os universais e que expressa de forma concisa e precisa as relações desses indivíduos com os universais e dos universais entre si. Assim, uma de suas maiores virtudes da tradução de sentenças da linguagem natural para ela é explicitação dessas relações.

Formalização do Quadrado Aristotélico das Oposições

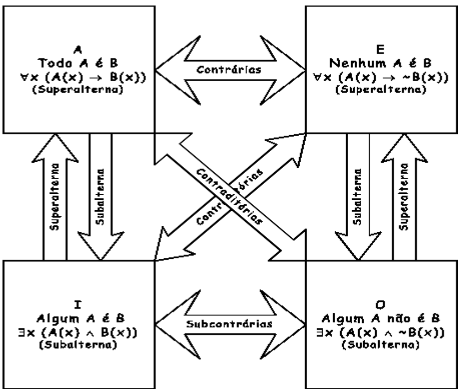
Com as definições dos quantificadores e a partir da composição de funções proposicionais com conectivos, vamos começar a estudar os principais resultados lógica tradicional.

Proposições Categóricas e Suas Formalizações		
	Afirmativa (**A** e **I** de "A f I r m o")	**Negativa** (**E** e **O** de "n E g O")
Universal	**A** Todo A é B $\exists x\ (A(x) \rightarrow B(x))$	**E** Nenhum A é B $\exists x\ (A(x) \rightarrow \sim B(x))$
Particular	I Algum A é B $\forall x\ (A(x) \wedge B(x))$	O Algum A não é B $\forall x\ (A(x) \wedge \sim B(x))$

Se o universo de discurso não é vazio, temos as seguintes **definições** e **inferências imediatas**:

– A e O, E e I são *contraditórias*, i.e., se uma é falsa, a outra é verdadeira.
– A e E são *contrárias*, i.e., não são ambas verdadeiras.
– I e O são *subcontrárias*, i.e., não são ambas falsas.
– I e O são, respectivamente, *subalternas* de A e E,
  e são verdadeiras, se, respectivamente, A e E são verdadeiras.
– A e E são, respectivamente, *superalternas* de I e O,
  e são falsas, se, respectivamente, I e O são falsas.

O que nos dá o quadra abaixo.



Obs.: Pode-se também considerar ainda:

A como $\exists x A(x)$; **E** como $\exists x \sim A(x)$; **I** como $\forall x A(x)$; e **O** como $\forall x \sim A(x)$.

REGRAS DE INFERÊNCIA COM QUANTIFICADORES

Nas lições anteriores, Quantificadores e Linguagem de 1ª Ordem: Semântica, introduzimos os quantificadores existencial e universal e estabelecemos suas semânticas. Nessa lição, veremos algumas regras de inferência a eles relacionados.

Comecemos com o seguinte exercício.

Exercício. Qual fórmula implica qual? (Segue abaixo exemplos de interpretação.)

(1) $\forall x A(x)$	(2) $A(a)$	(3) $\exists x A(x)$	(4) $A(x)$
Todos são autônomos	Pinóquio é autônomo	Alguém é autônomo	x é autônomo

A partir da solução do exercício anterior, podemos considerar como válidas as seguintes inferências:

(1) Instanciação Universal (IU)

$$\frac{\forall x A(x)}{A(a)} \qquad \frac{\forall x A(x)}{A(x)}$$

(2) Generalização Universal (GU)

$$\frac{A(x)}{\forall A(x)}$$

(3) Generalização Existencial (GE)

$$\frac{A(a)}{\exists x A(x)}$$

(4) Instanciação Existêncial (IE)

$$\frac{\exists x A(x)}{A(a)} \qquad a \Rightarrow \underline{\textbf{Nova}}$$

Notemos que, no caso (4) da Instanciação Existencial, como não sabemos quem é o indivíduo x que existe e tem a propriedade A, temos que usar uma **nova** constante para designá-lo.

Não temos restrições para o caso da regra (1) de Instanciação Universal; mais ainda, em geral, em uma dedução ou demonstrção, IU é usada para introduzir uma constante que já ocorreu.

Consideramos até agora as regras de inferência relativas a uma sentença atômica A(a) ou A(x), mas tais regras valem para quaisquer fórmulas, por exemplo:

(1) Instanciação Universal (IU)

$$\frac{\forall x(A(x) \rightarrow B(x))}{A(a) \rightarrow B(a)} \qquad \frac{\forall x(A(x) \rightarrow B(x))}{A(x) \rightarrow B(x)}$$

(3) Generalização Universal (GU)

$$\frac{A(x) \rightarrow B(x)}{\forall x(A(x) \rightarrow B(x))}$$

(4) Generalização Existencial (GE)

$$\frac{A(a) \wedge B(a)}{\exists x(A(x) \wedge B(x))}$$

(5) Instanciação Existêncial (IE)

$$\frac{\exists x(A(x) \wedge B(x))}{A(a) \wedge B(a)} \qquad a \Rightarrow \underline{\textbf{Nova}}$$

Podemos, pois, enunciar essas regras de uma forma completamente geral; é o que faremos a partir da notação introduzida a seguir.

Notação. Dada uma fórmula **Y**, escrevemos:

$$\mathbf{Y(x/a)}$$

para indicar a fórmula que resulta de **Y** substituindo as ocorrências livres de **x** pela constante individual **a**; e escrevemos

$$\mathbf{Y(a/x)}$$

para indicar a fórmula que resulta de **Y** substituindo as ocorrências da constante individual **a** pela variável individual **x**; neste caso, supomos que **x** é **<u>livre para</u>** **a**, isto é, a constante **a** não está sob o escopo de um quantificador da forma ∀**x** ou ∃**x**.

Exemplo. Se **Y** representa a fórmula M(a,b,x), então **Y**(x/a) é M(a,b,a) e **Y**(a/x) é M(x,b,x).

Regras de Inferência para Quantificadores

Instanciação Universal (IU)
$\forall x Y$ ――――― $Y(x/a)$ a ⇒ (Em geral) constante que já ocorreu na dedução ou demonstração.

Instanciação Existencial (IE)
$\exists x Y$ ―――――― $Y(x/a)$ a ⇒ Necessariamente, uma constante quenão ocorreu anteriormente na dedução ou demonstração

Generalização Existencial (GE)
Y ―――――― $\exists x Y(a/x)$

Generalização Existencial (GE)
Y ―――――― $\exists x Y(a/x)$

Com essas novas regras de inferência, podemos fazer deduções, com anteriormente.

Exercício. Faça a dedução dos argumentos abaixo

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$S(a)$	$\exists x S(x)$	$\forall x S(x)$	$\forall x(M(x) \rightarrow P(x))$	$\exists x(M(x) \wedge P(x))$
$\forall x(S(x) \rightarrow P(x))$	$\forall x(S(x) \rightarrow P(x))$	$\forall x(S(x) \rightarrow P(x))$	$\forall x(S(x) \rightarrow M(x))$	$\forall x(M(x) \rightarrow S(x))$
――――――――	――――――――	――――――――	――――――――	――――――――
$P(a)$	$\exists x P(x)$	$\forall x P(x)$	$\forall x(S(x) \rightarrow M(x))$	$\exists x(S(x) \wedge P(x))$

Negações de Quantificadores: Interdefinibilidade e Regras de Inferência

Exercício. Correlacione cada fórmula da coluna A com a fórmula equivalente da coluna B.

A	B
$\sim\exists x \Psi$	$\sim\forall x \Psi$
$\exists x \sim\Psi$	$\forall x \sim\Psi$
$\sim\exists x \sim\Psi$	$\sim\forall x \sim\Psi$
$\exists x \Psi$	$\forall x \Psi$

Notemos então que escolhido um quantificador como primitivo, o outro pode ser definido com o uso da negação, por meio das equivalências: $\forall x \Psi = \sim\exists x \sim\Psi$ e $\exists x \Psi = \sim\forall x \sim\Psi$.

A solução do exercício acima motiva ainda as regras de inferências a seguir.

Negação do Quantificador (NQ)			
$\dfrac{\sim\forall x\ \Psi}{\exists x\ \sim\Psi}$	$\dfrac{\sim\exists x\ \Psi}{\forall x\ \sim\Psi}$	$\dfrac{\exists x\ \sim\Psi}{\sim\forall x\ \Psi}$	$\dfrac{\forall x\ \sim\Psi}{\sim\exists x\ \Psi}$

Exercício. Faça a dedução do argumento abaixo.

$$\begin{array}{c} \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \\ \sim \forall x B(x) \\ \hline \sim \forall x A(x) \end{array}$$

FORMALIZAÇÃO DA SILOGÍSTICA ARISTOTÉLICA

Vimos na lição Formalização do Quadrado Aristotélico das Oposições que existem quatro tipos de sentenças categóricas.

TIPOS DE SENTENÇAS CATEGÓRICAS

A – Universal Afirmativa: Todo A é B.

I – Particular Afirmativa: Algum A é B.

E – Universal Negativa: Nenhum A é B.

O – Particular Negativa: Algum A não é B.

SILOGISMOS

Podemos agora estudar, como fez Aristóteles, a possibilidade de inferência de uma sentença categórica a partir de duas outras sentenças categóricas (notemos que a inferência de uma sentença categórica a partir de apenas uma sentença categórica são as inferências imediatas estudadas na lição Formalização do Quadrado Aristotélico das Oposições).

Nesse sentido, vamos então supor que:

Os silogismos têm duas premissas e uma conclusão.

A palavra "silogismo" em grego é sinônimo de raciocínio (como vimos na definição aristotélica, na lição Argumentos e Lógica), no entanto aqui vamos estudar (como fez o próprio Aristóteles) os raciocínios com duas premissas e uma conclusão (notemos que raciocínios mais complexos podem ser formados compondo-se os silogismos com duas premissas).

Feita essa restrição, vamos estudar os elementos dos silogismos categóricos e seus tipos. A figura abaixo ajuda a exemplificar os elementos dos silogismos categóricos.

TERMOS

Notemos que para inferir uma sentença categórica de duas outras, o sujeito da conclusão tem que aparecer em uma premissa, o predicado da conclusão tem que contar na outra premissa e tem que haver um termo comum as duas premissas (como na figura acima), o que motiva as definições abaixo.

S: termo menor (sujeito da conclusão)

P: termo maior (predicado da conclusão)

M: termo médio (ausente da conclusão e presente em ambas premissas)

PREMISSAS

A partir da definição acima dos termos, podemos fazer a seguinte classificação das premissas (ver figura).

Premissa Maior: aquela com o termo maior.

Premissa Menor: aquela com o termo menor

FIGURAS DO SILOGISMO

Notemos que os termos menor, médio e maior, podem ocupar diferentes posições (sujeito e predicado) das premissas. Para simplificar a classificação dos silogismo, vamos considerar que a primeira premissa é a maior, sem perda de generalidade (caso não seja, basta inverter as premissas). Temos então 4 figuras para os silogismos, conforme a posição do termo médio nas premissas:

1ª Figura	2ª Figura	3ª Figura	4ª Figura	
MP	PM	MP	PM	(considerada por medievais,
SM	SM	MS	MS	mas não por Aristóteles)
——	——	——	——	
SP	SP	SP	SP	

Silogismos Possíveis e Silogismos Válidos

Dos 256 silogismos possíveis (pois, com 4 tipos de sentenças categóricas temos: as 4 figuras possíveis acima x 4 premissas menores x 4 premissas maiores x 4 conclusões), apenas 19 são válidos (sendo que, como veremos na formalização dos silogismo, em 4 deles subentendemos uma premissa que expressa que o domínio não é vazio). Na tabela Modos Concludentes dos Silogismos Categóricos e Suas Formalizações, temos os 19 silogismos categóricos válidos.

Nomes dos Silogismos e Redução à Primeira Figura

Os nomes dos silogismos (estabelecidos na Idade Média) indicam a forma de redução dos silogismos (das 2ª, 3ª e 4ª figuras) aos da 1ª figura:

A primeira consoante do nome de cada silogismo indica o silogismo correspondente na 1ª figura ao qual ele se reduz.

As consoantes que seguem as vogais indicam as operações a serem feitas para essa redução:

S : conversão simples (permutação entre sujeito e predicado);

P : conversão por acidente (de "Todo A é B" para "Algum B é A");

M : permutação das premissas;

C : redução ao absurdo (constrói-se um novo silogismo na primeira figura que tem como premissas a que precede C e a contraditória da conclusão, deduz-se então a contraditória da outra premissa, sendo pois absurdo considerar, no silogismo inicial, as premissas verdadeiras e a conclusão falsa).

(Para uma dedução formal dessas reduções veja MATES, 1968, Seção 11.2)

Aristóteles, nos *Primeiros Analíticos*, mostra como reduzir todos os silogismos a **Barbara** ou a **Celarent**.

Modos Concludentes dos Silogismos Categóricos e suas Formalizações

1ª Figura **MP** **SM** --- **SP**	**bArbArA** Todo M é P. Todo S é M. Logo, todo S é P. $\forall x\ (M(x) \to P(x))$ $\forall x\ (S(x) \to M(x))$ ――――――― $\forall x\ (S(x) \to P(x))$	**cElArEnt** Nenhum M é P Todo S é M. Logo, nenhum S é P. $\forall x\ (M(x) \to \sim P(x))$ $\forall x\ (S(x) \to M(x))$ ――――――― $\forall x\ (S(x) \to \sim P(x))$	**dArII** Todo M é P. Algum S é M. Logo, algum S é P. $\forall x\ (M(x) \to P(x))$ $\exists x\ (S(x) \land M(x))$ ――――――― $\exists x\ (S(x) \land P(x))$	**fErIO** Nenhum M é P. Algum S é M. Logo, algum S não é P. $\forall x\ (M(x) \to \sim P(x))$ $\exists x\ (S(x) \land M(x))$ ――――――― $\exists x\ (S(x) \land \sim P(x))$

2ª Figura **PM** **SM** --- **SP**	**cEsArE** Nenhum P é M. Todo S é M. Logo, nenhum S é P $\forall x\ (P(x) \to \sim M(x))$ $\forall x\ (S(x) \to M(x))$ ――――――― $\forall x\ (S(x) \to \sim P(x))$.	**cAmEstrEs** Todo P é M. Nenhum S é M. Logo, nenhum S é P $\forall x\ (P(x) \to M(x))$ $\forall x\ (S(x) \to \sim M(x))$ ――――――― $\forall x\ (S(x) \to \sim P(x))$	**fEstInO** Nenhum P é M. Algum S é M. Logo, algum S não é P. $\forall x\ (P(x) \to \sim M(x))$ $\exists x\ (S(x) \land M(x))$ ――――――― $\exists x\ (S(x) \land \sim P(x))$	**bArOcO** Todo P é M. Algum S não é M. Logo, algum S não é P. $\forall x\ (P(x) \to M(x))$ $\exists x\ (S(x) \land \sim M(x))$ ――――――― $\exists x\ (S(x) \land \sim P(x))$

3ª Figura **MP** **MS** --- **SP**	**dArAptI** Todo M é P. Todo M é S. Logo, algum S é P. $[\exists x\ M(x)]$ $\forall x\ (M(x) \to P(x))$ $\forall x\ (M(x) \to S(x)$ ------------------- $\exists x\ (S(x) \land P(x))$	**fElAptOn** Nenhum M é P. Todo M é S. Logo, algum S não é P. $[\exists x\ M(x)]$ $\forall x\ (M(x) \to \sim P(x))$ $\forall x\ (M(x) \to S(x))$ ------------------- $\exists x\ (S(x) \land \sim P(x))$	**dIsAmIs** Algum M é P. Todo M é S. Logo, algum S é P. $\exists x\ (M(x) \land P(x))$ $\forall x\ (M(x) \to S(x))$ ------------------- $\exists x\ (S(x) \land P(x))$
	dAtIsI Todo M é P. Algum M é S. Logo, algum S é P. $\forall x\ (M(x) \to P(x))$ $\exists x\ (M(x) \land S(x))$ ------------------- $\exists x\ (S(x) \land P(x))$	**BOcArdO** Algum M não é P. Todo M é S. Logo, algum S não é P. $\exists x\ (M(x) \land \sim P(x))$ $\forall x\ (M(x) \to S(x))$ ------------------- $\exists x\ (S(x) \land \sim P(x))$	**fErIsOn** Nenhum M é P. Algum M é S. Logo, algum S não é P. $\forall x\ (M(x) \to \sim P(x))$ $\exists x\ (M(x) \land S(x))$ ------------------- $\exists x\ (S(x) \land \sim P(x))$

4ª Figura (considerada por medie-vais, mas não por Aristóteles) **PM** **MS** --- **SP**	**bAmAlIp** Todo P é M. Todo M é S. Logo, algum S é P. $[\exists x\ P(x)]$ $\forall x\ (P(x) \to M(x))$ $\forall x\ (M(x) \to S(x))$ ------------------- $\exists x\ (S(x) \land P(x))$	**cAmEnEs** Todo P é M. Nenhum M é S. Logo, nenhum S é P. $\forall x\ (P(x) \to M(x))$ $\forall x\ (M(x) \to \sim S(x))$ ------------------- $\forall x\ (S(x) \to \sim P(x))$	**dImAtIs** Algum P é M. Todo M é S. Logo, algum S é P. $\exists x\ (P(x) \land M(x))$ $\forall x\ (M(x) \to S(x))$ ------------------- $\exists x\ (S(x) \land P(x))$	**FEsApO** Nenhum P é M. Todo M é S. Logo, algum S não é P. $[\exists x\ M(x)]$ $\forall x\ (P(x) \to \sim M(x))$ $\forall x\ (M(x) \to S(x))$ ------------------- $\exists x\ (S(x) \land \sim P(x))$	**FrEsIsOn** Nenhum P é M. Algum M é S. Logo, algum S não é P $\forall x\ (P(x) \to \sim M(x))$ $\exists x\ (M(x) \land S(x))$ ------------------- $\exists x\ (S(x) \land \sim P(x))$

O SISTEMA R DE DEDUÇÃO NATURAL PARA A LÓGICA DE PREDICADOS CLÁSSICA

Vamos aqui introduzir um sistema de dedução natural para a Lógica de Predicados Clássica que designaremos por R. O sistema R tem apenas dois conectivos, um quantificador e cinco regras de inferência. Como o sistema S para a Lógica Proposicional Clássica, o sistema R é um sistema de dedução natural e não possui axiomas, apenas regras de inferência; logo, para definir R, precisamos apenas definir: (1) o alfabeto de R, (2) as fórmulas de R, e (3) as regras de inferência de R.

(1) Alfabeto de R. O Alfabeto de R se constitui dos signos:

~ → ∀

a' a'' a''' a'''' etc.

x' x'' x''' x'''' etc.

A,' A,'' A,,'' A,''' A,,''' A,,,''' A,'''' etc.

Como o sistema S, o sistema R possui apenas dois conectivos: ~ e →. Também como em S , sua linguagem formal tem ainda o mesmo poder expressivo que a linguagem formal com os conectivos ~, ∧, ∨, → e ↔ (cf. definições mais abaixo).

O sistema R possui apenas um quantificador: o quantificador universal ∀. Entretanto, neste caso, o poder expressivo de sua linguagem é também o mesmo que se tivesse o quantificador existencial ∃, pois, como vimos na Seção Regras de Inferência com Quantificadores ele pode ser definido a partir da negação e do quantificador universal, como na definição mais abaixo.

Os signos a' a'' a''' a'''' etc. são chamados de *constantes* de R e os signos x' x'' x''' x'''' etc. são chamados de *variáveis* de R. As linhas (aspas simples) são usadas para não limitar o número de constantes e variáveis (podendo então haver infinitas contates ou variáveis). Constantes e variáveis de R são chamadas de *termos* de R.

Os signos A,' A,'' A,,'' A,'''A,,'''A,,,''' A,'''', etc. são chamados de *predicados* de R; um *predicado n-ário* é um predicado com n linhas inferiores (vírgulas). Como no caso das constantes e variáveis, as linhas superiores (aspas simples) são usadas para não se limitar o número de predicados n-ários.

(2) Fórmulas de R.

Uma *fórmula atômica* de R é uma expressão formada de um predicado n-ário seguido de n termos entre parênteses separados por vírgulas.

Exemplo: A,'(a') e A,,'''(a''', x'').

As *fórmulas* de R são definidas pelas seguintes regras de formação:

(a) Uma fórmula atômica é uma fórmula;

(b) Se X é uma fórmula, então ~X é uma fórmula;

(c) Se X e Y são fórmulas, então (X → Y) é uma fórmula;

(d) Se Y é uma fórmula e x é uma variável, então ∀xY é uma fórmula.

Notemos que, como em S, (a) estabelece uma base para nossa definição e que, a partir dela, podemos construir (infinitas) fórmulas usando as regras (b), (c) e (d) (definição por indução).

Vamos adotar as seguintes definições para os demais conectivos e o quantificador existencial:

$$X \vee Y :=_{def.} \sim X \rightarrow Y$$

$$X \wedge Y :=_{def.} \sim(X \rightarrow \sim Y)$$

$$X \leftrightarrow Y :=_{def.} (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$$

(notar que $\wedge$ está definido logo acima)

$$\exists xY :=_{def.} \sim\forall x\sim Y$$

(3) Regras de Inferência de R.

Modus Ponens (MP)	Redução ao Absurdo (RA)	Demonstração Condicional (DC)	Generalização Universal (GU)	Instanciação Universal (IU)
$\dfrac{X \rightarrow Y \quad X}{Y}$	$\dfrac{\sim X \rightarrow Y \quad \sim X \rightarrow \sim Y}{X}$	$\dfrac{\left\lvert \begin{array}{l} X \\ \vdots \\ Y \end{array}\right.}{X \rightarrow Y}$	$\dfrac{Y}{\forall xY}$	$\dfrac{\forall xY}{Y(x/t)}$

Dados os elementos constituintes de nosso sistema R, podemos agora definir dedução e demonstração em R.

Definição. Uma **<u>dedução no sistema R</u>** de uma fórmula Z a partir das premissas X_1, X_2, …, X_k é uma sequência de fórmulas Y_1, Y_2, …, Y_m tal que:

(1) a última fórmula Y_m é Z; e

(2) cada fórmula Y_i da sequência:

(2.a) ou é uma da premissa X_j;

(2.b) ou é uma hipótese (usada na aplicação da regra de inferência DC);

(2.c) ou é o resultado da aplicação de umas das regras de inferência MP, RA, DC, GU ou IU em fórmulas anteriores na sequência (Y_i com i<j) que não estejam sob uma hipótese já utilizada.

Notação. Vamos indicar que existe uma dedução, no sistema R, da conclusão Z a partir das premissas X_1, X_2, …, X_k por[*]:

$$X_1, X_2, \ldots, X_k \vdash Z$$

Notemos então que todo esquema de dedução de S é um esquema de dedução de R.

Exemplo. Mostrar que: (1) $X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z \vdash X \rightarrow Z$; e (2) $Y \vdash X \rightarrow Y$.

$X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z \vdash X \rightarrow Z$

1. $X \rightarrow Y$ Premissa
2. $Y \rightarrow Z$ Premissa
3. | X Hipótese
5. | Y MP 1,3
6. | Z MP 2,5
7. $X \rightarrow Z$ DC 3-6

$Y \vdash X \rightarrow Y$

1. Y Premissa
2. | X Hipótese
3. | Y Repetição
4. $X \rightarrow Y$ CD 2-3

[*]Em geral, usa-se o signo *R*, no sinal de dedução, i.e., $X_1, X_2, \ldots, X_n \vdash_R Z$, para indicar que se trata de uma dedução em R; entretanto, para simplificar, vamos aqui dispensar o uso do signo *R*.

Analogamente a S, **toda forma de dedução no sistema R pode ser vista como estabelecendo uma regra de inferência (derivada)**. Assim, $Y \vdash X \rightarrow Y$ estabelece também uma regra de inferência **Prefixação** abreviada por **Pf**.

Como em S, vamos agora definir uma demonstração em R. Cabe observar novamente que: uma demonstração é apenas uma dedução sem premissas.

Definição. Uma **demonstração no sistema R** de uma fórmula Z é uma sequência de fórmulas $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ tal que:

(1) a última fórmula Y_m é Z; e

(2) cada fórmula da Y_i sequência:

(2.a) ou é uma hipótese (usada na aplicação da regra de inferência DC)

(2.b) ou é o resultado da aplicação de umas das regras de inferência MP, RA, DC, GU ou IU em fórmulas anteriores na sequência (Y_i com $i<j$) que não estejam sob uma hipótese já utilizada..

Definição. Um fórmula Z é um **teorema de R** se existe uma demonstração para Z.

Notação. Vamos indicar que existe uma demonstração da fórmula Z no sistema R, ou ainda, que Z é um teorema de R, por*:

$$\vdash Z$$

Notar que todo esquema de demonstração de S é um esquema de demonstração de R e que todo esquema de fórmula que é teorema em S o é em R.

Exemplo. Mostre que: $\vdash X \rightarrow X$ (Princípio da Identidade) e $\vdash {\sim}{\sim}X \rightarrow X$ (Princípio da Dupla Negação).

$\vdash X \rightarrow X$

1. | X Hipótese
2. | X Repetição 1
3. $X \rightarrow X$ DC 1-2

$\vdash {\sim}{\sim}X \rightarrow X$

1. | ~~X Hipótese
2. | $\sim X \rightarrow {\sim}{\sim}X$ Pf 1
3. | $\sim X \rightarrow \sim X$ PI
4. | X RA 2,3
5. $\sim\sim X \rightarrow X$ DC 1-4

Por fim, pode-se mostrar que:

(1) O Sistema R é correto e completo, ou seja,

$$\vdash Z \Leftrightarrow \vDash Z$$

no qual $\vDash Z$ denota que a fórmula Z é uma fórmula válida da linguagem de R; e

(2) O Sistema R é inferencialmente correto e completo, ou seja,

$$X_1, X_2, \ldots, X_k \vdash Z \Leftrightarrow X_1, X_2, \ldots, X_k \vDash Z$$

no qual $X_1, X_2, \ldots, X_k \vDash Z$ denota que, para toda interpretação I, $X_1, X_2, \ldots, X_k \vDash_I Z$.

*Também aqui, em geral, usa-se o signo *R*, no sinal de demostração, i.e., $\vdash_R Z$, para indicar que se trata de uma demonstração em R; e, também, para simplificar, vamos dispensar o uso do signo *R*.

O MÉTODO DAS RAMIFICAÇÕES PARA A LÓGICA DE 1ª ORDEM

Vimos, na lição O Método das Ramificações, um método automático para testar se uma fórmula era ou não tautologia, isto é, verdadeira em todas as interpretações (linhas da tabela-verdade) e vimos, na lição O Método das Ramificações para Argumentos, um método automático para testar se um argumento era válido ou não na Lógica Proposicional Clássica. Veremos nessa lição como estender ambos Métodos para a Lógica de 1ª Ordem, no sentido de testar se uma fórmula é válida ou não ou se um argumento é válido ou não.

Notemos inicialmente que devemos definir uma Regra de Desdobramento para cada regra de formação de uma fórmula (cf. a lição Linguagem de 1ª Ordem: Sintaxe); no caso das regras de formação relativas aos conectivos, as regras de desdobramento são as mesmas que antes, conforme a tabela-abaixo.

REGRAS DE DESDOBRAMENTO PARA CONECTIVOS

$\sim\sim X$	**$X \wedge Y$**	**$X \vee Y$**	**$X \rightarrow Y$**	**$X \leftrightarrow Y$**
X	X	Λ	Λ	Λ
	Y	$X \quad Y$	$\sim X \quad Y$	$X \quad \sim X$
				$Y \quad \sim Y$

$\sim(X \wedge Y)$	**$\sim(X \vee Y)$**	**$\sim(X \rightarrow Y)$**	**$\sim(X \leftrightarrow Y)$**
Λ	$\sim X$	X	Λ
$\sim X \quad \sim Y$	$\sim Y$	$\sim Y$	$X \quad \sim X$
			$\sim Y \quad Y$

A essas regras temos que acrescentar regras de desdobramento relativas aos quantificadores existencial e universal e suas negações, como na tabela abaixo.

REGRAS DE DESDOBRAMENTO PARA QUANTIFICADORES E SUAS NEGAÇÕES

$\exists xY$	**$\forall xY$**
$Y(x/c)$	**$Y(x/c)$**
em que c é uma **nova** constante	em que c é uma constante **já presente** na ramificação (ou nova se não existe nenhuma)
$\sim\exists xY$	**$\sim\forall xY$**
$\forall x\sim Y$	**$\exists x\sim Y$**

A forma de aplicação do Método de Ramificação (para fórmulas e para argumentos) permanece a mesma que antes.

Exercício. Aplique o Método da Ramificação para mostrar que são válidos os modos concludentes dos silogismos categóricos aristotélicos.

OS AXIOMAS DA TEORIA DE CONJUNTO ZFC (ZERMELO-FRAENKEL-CHOICE)

Feitosa, H.A., Nascimento, M.C. e Alfonso, A.B. Teoria dos Conjuntos: sobre a fundamentação matemática e a construção de conjuntos numéricos. Bauru, 2008. pp. 13-15.

2.2 Os axiomas de ZFC

Introduzimos agora a axiomática da Teoria dos Conjuntos fornecida por Zermelo, Fraenkel e Skolen, com algumas atualizações e outros axiomas necessários para as pretensões deste trabalho. Esta axiomática, embora não seja a única, é, certamente, a mais usual.

Como indicado na seção anterior, temos como noções primitivas, os conceitos de "conjunto" e "pertinência". A partir destes conceitos são definidos todos os outros e são construídos os conjuntos numéricos dos naturais, inteiros, racionais e reais, entre outros, e todos os demais conceitos matemáticos com os quais o matemático cotidianamente trabalha.

Para cada um dos axiomas, apresentamos sua versão formalizada e o seu significado intuitivo:

(Ax_1) **Axioma do conjunto vazio** - Existe um conjunto que não tem elementos:

$$\exists a\, \forall x\, (x \notin a).$$

O conjunto vazio é denotado por $\emptyset$.

(Ax_2) **Axioma da extensionalidade** - Se dois conjuntos têm exatamente os mesmos elementos, então eles são idênticos:

$$\forall a\, \forall b\, ((\forall x\, (x \in a \leftrightarrow x \in b)) \rightarrow a = b).$$

(Ax_3) **Axioma esquema da compreensão** - Para cada propriedade P e cada conjunto dado, existe um conjunto, cujos elementos são os elementos do conjunto dado que satisfazem a propriedade P em questão:

$$\forall y\, \exists a\, (x \in a \leftrightarrow x \in y \wedge P(x)).$$

(Ax_4) **Axioma do par** - Dados os conjuntos y e z, existe um conjunto cujos elementos são exatamente y e z:

$$\forall y\, \forall z\, \exists a\, \forall x\, (x \in a \leftrightarrow x = y \vee x = z).$$

(Ax_5) **Axioma da união** - Para todo conjunto z, existe um conjunto a tal que x está em a se, e somente se, x está em algum y e y é elemento de z:

$$\forall z\, \exists a\, \forall x\, (x \in a \leftrightarrow \exists y\, (x \in y \wedge y \in z)).$$

Definição: $a \subseteq b =_{def} \forall x\, (x \in a \rightarrow x \in b)$.

(Ax6) **Axioma do conjunto das partes** - Para cada conjunto existe um conjunto cujos membros são exatamente os subconjuntos do conjunto dado:

$$\forall y\, \exists a\, \forall x\, (x \in a \leftrightarrow x \subseteq y).$$

(Ax7) **Axioma do infinito** - Existe um conjunto indutivo:

$$\exists a\, (\varnothing \in a \wedge \forall x\, (x \in a \rightarrow x \cup \{x\} \in a)).$$

(Ax8) **Axioma esquema da substituição** - Se a relação obtida de P(x, y) é uma relação funcional em x e y, então dado um conjunto B, existe um conjunto A, cujos elementos são aqueles elementos de B que satisfazem a fórmula P(x, y), isto é, A = {z ∈ B / P(x, z)}.

$$\forall x\, \exists! y\, P(x, y) \rightarrow \forall b\, \exists a\, \forall z\, (z \in a \leftrightarrow (\exists x \in b)\, P(x, z)).$$

(Ax9) **Axioma da escolha** - Todo conjunto de conjuntos tem uma função escolha, isto é:

$$\forall x\, \exists \varphi\, (\varphi \text{ é uma função} \wedge \mathrm{Dom}(\varphi) = x - \{\varnothing\} \wedge \forall y\, (y \in \mathrm{Dom}(\varphi) \rightarrow \varphi(y) \in y)).$$

O axioma da escolha tem muitas formas equivalentes, normalmente tratadas nos textos de teoria dos conjuntos, como por exemplo:

O produto cartesiano de uma família não vazia de conjuntos não vazios é, ainda, não vazio. Ou:
Dado um conjunto de índices I e uma função φ com domínio em I, se, para todo i ∈ I, φ(i) ≠ ∅, então $\Pi_{i\in I}\, \varphi(i) \neq \varnothing$.

Em outras palavras, como cada φ(i) é não vazio, o enunciado garante que podemos tomar (escolher) um elemento de cada φ(i), para i ∈ I, e formarmos uma seqüência desses elementos. Quando I é finito, o enunciado é claro, pois podemos perpassar a quantidade finita de conjuntos φ(i) e, para cada um deles, escolher um elemento. Contudo, o enunciado se aplica mesmo quando I é infinito, o que deixa de ser natural.

(Ax10) **Axioma da fundamentação (ou da regularidade)** - Todo conjunto não vazio tem um elemento com o qual não tem elementos em comum:

$$\forall b\, (b \neq \varnothing \rightarrow \exists a\, (a \in b \wedge a \cap b = \varnothing)).$$

Este sistema axiomático não é independente, pois, por exemplo, os axiomas do conjunto vazio e do par podem ser derivados a partir dos demais. Estes são mantidos no sistema devido a um caráter construtivo da teoria, pois onde são utilizados ainda não foram introduzidos os outros axiomas dos quais eles derivam.

A experiência tem mostrado que todos os teoremas, cujas demonstrações têm sido aceitas pela comunidade matemática, podem, pelo menos em princípio, ser obtidos a partir destes axiomas e, eventualmente, pelo acréscimo de mais alguns axiomas.

Contudo, podem todos os teoremas matemáticos verdadeiros, incluindo aqueles que ainda não tenham sido demonstrados, ser obtidos nesta teoria de conjuntos? Certamente não. Sabemos que isto não ocorre a partir dos teoremas de incompletude de Gödel[18].

O PRIMEIRO METATEOREMA DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL

Vamos, nesta seção, discutir o Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel, um dos principais resultados da Lógica contemporânea, que mostra que não existe uma teoria axiomática completa em relação a Aritmética dos números naturais.

Vejamos, inicialmente, como construir teorias de primeira ordem sobre os números naturais.

Notemos inicialmente que todos os números naturais podem ser constituídos a partir do número 0 e da função sucessor S da seguinte forma:

0 $:=_{def.}$ *0*

1 $:=_{def.}$ *S*(*0*) (isto é, 1 é o sucessor de 0)

2 $:=_{def.}$ *S*(1) (isto é, 2 é o sucessor de 1)

3 $:=_{def.}$ *S*(2) (isto é, 3 é o sucessor de 2) etc.

Mais ainda, podemos denotar todos os números naturais apenas com os signos *0*, *S*, (e) da seguinte forma.

0 $:=_{def.}$ *0*

1 $:=_{def.}$ *S*(*0*)

2 $:=_{def.}$ *S*(*S*(*0*))

3 $:=_{def.}$ *S*(*S*(*S*(*0*))) etc.

Podemos então definir um numeral pela seguinte definição por recursão

Definição. Um *numeral* é uma expressão[9] que determinada pelas seguintes regras:

(1) 0 é um numeral.

(2) Se a expressão **u** é um numeral, então a expressão S(**u**) é um numeral.

Logo, pela definição acima:

0 é um numeral;

S(*0*) é um numeral;

S(*S*(*0*)) é um numeral;

S(*S*(*S*(*0*))) é um numeral; etc.

Notemos, que os numerais como definidos acima são expressões que denotam números naturais. Mas não apenas eles, por exemplo, quando escrevemos (1+1) estamos denotando o número natural 2. Logo, podemos usar também os signos + (adição) e . (multiplicação) para construir expressões que denotam números naturais. Tal situação motiva a definição de termo a seguir.

Definição. Um *termo* é uma expressão determinada pelas seguintes regras:

1. Uma variável individual **x** é um termo;

2. 0 é um termo;

[9] Lembremos que uma expressão é uma sequência de signos do alfabeto da linguagem.

3. Se a expressão **u** é um termo, então a expressão S(**u**) é um termo.

4. Se as expressões **u** e **v** são termos, então a expressão (**u**+**v**) é um termo.

5. Se as expressões **u** e **v** são termos, então a expressão (**u**.**v**) é um termo.

Exemplo de termos: 0, x_1, $S(0)$, $S(x_1)$, $(0+0)$, $(x_1 + 0)$, $(x_1 + x_2)$, $S(x_1 + x_2)$, $(x_1 + S(x_2))$, $(x_1 . 0)$, $(x_1 . x_2)$, $(x_1 . x_2) + x_1$, $x_1 . S(x_2)$, etc.

Por fim, para construir teorias de primeira ordem sobre números naturais, vamos considerar ainda, em nossa linguagem, os signos = (igualdade) e < (menor que).

Assim, podemos definir as formulas atômicas de nosso sistema como a seguir.

Definição. Uma *fórmula atômica* é uma expressão definida pelas seguintes regras:

(1) Se **u** e **v** são termos, então **u** = **v** é uma fórmula atômica;

(2) Se **u** e **v** são termos, então **u** < **v** é uma fórmula atômica.

Exemplo de fórmulas atômicas: $x_1=x_2$, $x_1<x_2$, $Sx_1=0$, $Sx_1=Sx_2$, $x_1+0=x_1$, $x_1+Sx_2=S(x_1+x_2)$, $x_1.0=0$, $x_1<0$.

Vamos agora considerar a teoria formal ***N*** com os seguintes axiomas não-lógicos.

Axiomas não-lógicos de *N*:

N1. $Sx_1 \neq 0$

N2. $Sx_1 = Sx_2 \rightarrow x_1 = x_2$

N3. $x_1 + 0 = x_1$

N4. $x_1 + Sx_2 = S(x_1 + x_2)$

N5. $x_1 . 0 = 0$

N6. $x_1 . Sx_2 = (x_1 . x_2) + x_1$

N7. $\sim (x_1 < 0)$

N8. $x_1 < Sx_2 \rightarrow (x_1 < x_2 \vee x_1 = x_2)$

N9. $x_1 < x_2 \vee x_1 = x_2 \vee x_2 < x_1$

Notemos que ***N*** tem os seguintes signos não-lógicos:

0 (uma constante, denominada de *zero),*

S (um símbolo de função unária, denominado de *sucessor*)

\+ (um símbolo de função binária, denominado de *adição*)

. (um símbolo de função binária, denominado de *multiplicação*)

< (um símbolo de predicado binário, denominado de *menor que*)

Por fim, para enunciar o Primeiro Metateorema da Incompletude de Gödel, consideraremos as definições abaixo.

Definição. Uma teoria T é *extensão* de uma teoria S se todo teorema de S é teorema de T.

Definição. Uma teoria T é *consistente* se não existe uma fórmula F tal que F e ~F são teorema de T.

Primeiro Metateorema da Incompletude de Gödel. Para toda extensão consistente axiomatizada ***T*** de ***N***, existe, e podemos exibir, uma fórmula fechada G_T tal que:

(1) G_T é verdadeira no Modelo Padrão ℕ

(2) G_T não é teorema de ***T***;

Notemos então que o Metateorema acima implica que a verdade aritmética não é definível por meio de teorias axiomáticas, pois, para qualquer teoria axiomática T (extensão de N) existirá uma verdade aritmética que não é demonstrável em T. Nesse sentido, podemos dizer que a dimensão semântica relativa aos Números Naturais não pode ser reduzida à dimensão sintática (mera manipulação de signos definidas por um conjunto finito de regras).

Passemos agora a descrever os aspectos gerais da metademonstração do Primeiro Metateorema da Incompletude (para detalhes, ver Tassinari, 2003). O núcleo da metademonstração está em construir, para cada extensão axiomatizada ***T*** de ***N***, uma fórmula G_T, chamada de *Fórmula de Gödel*, tal que G_T implica sua própria indemonstrabilidade em ***T***. Portanto, como ***T*** é consistente, ***T*** não pode demonstrar G_T, o que mostra, por este fato mesmo, que G_T é verdadeira. A analogia aqui com o paradoxo do mentiroso é evidente. Lembremos o paradoxo do mentiroso: consideremos o enunciado "Eu estou mentindo". Ora, se este enunciado for verdadeiro, então é uma mentira, portanto é falso; por outro lado, se for falso, então é uma mentira, e, portanto, é verdadeiro; lgo, temos uma contradição. Porém, no caso da fórmula de Gödel, não há uma contradição propriamente dita, pois o que a fórmula implica, devido a sua construção como veremos a seguir, é sua própria indemonstrabilidade, e não sua autonegação. Daí decorre, não que ela não seja verdadeira, mas que ela não seja demonstrável. Um dos méritos do Metateorema é, portanto, também, diferenciar a noção de verdade da noção de demonstrabilidade, bem como, diferenciar a noção de metademonstração da de demonstração.

A metademonstração tem então os seguintes passos gerais.

(1) Inicialmente, define-se uma *numeração de Gödel*, que consiste em representar, com números, as expressões e as sequências de expressões de ***T*** de ***N***. Tal número é chamado de *número de Gödel* da expressão ou da sequência de expressões.

Notemos que como os termos e fórmulas são expressões e demonstrações são sequências de expressões (de fórmulas), então a numeração de Gödel permite associar um número a cada fórmula e um número a cada demonstração (na Observação 1, mostramos como definir uma possível numeração de Gödel para N).

(2) A partir de (1), mostra-se como a demonstração em ***T*** pode ser representada por uma fórmula de T, que denominaremos de ***Dem(x,y)***, tal que, se *x* é o número de Gödel da demonstração da fórmula de número Gödel *y*, então a fórmula ***Dem(x,y)*** é teorema de T.

(3) A partir de (2), podemos definir uma fórmula $\mathbf{Teo_T(a)}$, ou seja, a fórmula **∃xDem(a,x)**, tal que $\mathbf{Teo_T(a)}$ é um teorema de T se, e somente se, a é o número de Gödel de uma fórmula que é teorema de T.

(4) Por fim, exibe-se uma fórmula G_T, chamada de fórmula de Gödel, tal que

G_T é ~$\text{Teo}_T([G_T])$,

na qual $[G_T]$ é o número de Gödel da fórmula G_T, ou seja,

G_T expressa sua própria indemonstrabilidade (veja na Observação 2, os passos gerais para a construção de G_T).

(6) Se G_T fosse um teorema de ***T***, então também seria um teorema a fórmula $\text{Teo}_T([G_T])$. Ora, mas como G_T é ~$\text{Teo}_T([G_T])$, teríamos que são teorema de ***T*** as fórmulas $\text{Teo}_T([G_T])$ e ~$\text{Teo}_T([G_T])$, o que não é possível, se a teoria ***T*** é consistente.

Podemos, então, concluir que, se ***T*** é consistente, então $\boldsymbol{G_T}$ não pode ser demonstrada em ***T***.

(7) Portanto, temos que $\boldsymbol{G_T}$ não é demonstrável em ***T***, e, por este fato mesmo, já que afirma sua própria indemonstrabilidade, é verdadeira, o que metademonstra as partes (1) e (2) do Metateorema.

Observação 1. Uma possível numeração de Gödel para a teoria ***N***.

Inicialmente, vamos associar às infintas variáveis x_i da teoria ***N*** os números pares:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	...
2	4	6	8	10	12	...

Assim, sobram os números ímpares paras associarmos aos outros signos de ***N***. Associamos, pois, a cada signo de ***N***, os seguintes números:

~	$\rightarrow$	$\forall$	=	0	S	+	.	<	(	)	x_i
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	2.i

Com isso toda expressão (que é uma sequência de signos) fica associada a uma sequência de números, por exemplo, a fórmula ~$(x_1<0)$ está associada à sequência de números (1, 19, 2, 17, 9, 21).

Vamos agora mostrar como associar um número a cada sequência de números. Consideremos os números primos, isto é, os números que são divididos apenas por si mesmos e por 1, ou seja: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 etc. Se p_n denota o n-ésimo número primo (ou seja, p_1=2, p_2=3, p_3=5, p_4=7 etc.), então podemos atribuir a cada sequência de números (x_1, ...x_n) o número $p_1^{x1}. p_2^{x2}. \dots . p_n^{xn}$; por exemplo, à sequência (1, 19, 2, 17, 9, 21) atribuímos o número:

$p_1^{1}.p_2^{19}.p_3^{2}.p_4^{17}.p_5^{9}.p_6^{21} = 2^1.3^{19}.5^2.7^{17}.11^9.13^{21} =$ 582.565.235.856.745.000.000.000.000.000.000.

Com isso, associamos um número a cada expressão de ***N*** (e termos e fórmulas são expressões de ***N***), chamado de *número de Gödel* da expressão. Por exemplo, calculamos acima o número de Gödel da fórmula ~$(x_1<0)$.

Como a cada sequência de números (x_1, ...x_n), podemos associar o número $p_1^{x1}. p_2^{x2}. \dots . p_n^{xn}$; e como uma demonstração é uma sequência de fórmulas, então podemos associar um número a cada demonstração. Esse número é chamado de *número de Gödel* da demonstração.

Observação 2. Como construir a fórmula de Gödel.

A partir de uma numeração de Gödel é possível mostrar que existe uma fórmula, que denotamos por ***Dem*(*x*, *y*)**, tal que se *x* é o número da demonstração da fórmula de número *y*, então a fórmula ***Dem*(*x*,*y*)** é teorema de T. Com isso, podemos representar os teoremas de ***T*** pela fórmula **∃xDem(a,x)**, que pode ser denominada por **Teo_T(a)**.

Além disso, é possível mostrar como calcular a função Sub([A], [x], [a]) é o número da fórmula que resulta da substituição da variável x, pelo número do termo a.

Vamos então mostrar, em linhas gerais, como obter a fórmula G_T.

Comecemos pela fórmula: ~Teo_T(x_1).

Se a variável x_1 vier a ser substituída pelo numeral [A], obtemos a fórmula ~Teo_T([A])

que é verdadeira se, e somente se, A não é um teorema de T.

Como 2 é o número de Gödel da variável x_1, temos então que Sub([A], 2, [a]) é o número da fórmula que resulta da substituição de x_1 pelo numeral [a] da expressão a.

Chamemos, então, de *G* a fórmula

G : ~Teo_T(Sub(x_1, 2, x_1)),

e, chamemos de G_T a fórmula

G_T : ~Teo_T(Sub([*G*], 2, [*G*])),

temos que

(♦) G_T é o resultado de se substituir em *G* a variável x_1 pelo numeral [*G*].

Pela interpretação de Teo_T e Sub em G_T, temos que G_T é verdadeira se, e somente se,

a fórmula que resulta de *G*,

pela substituição da variável x_1 pelo numeral [*G*], não é um teorema de T.

Ora, mas por (♦) acima, esta fórmula, que G_T afirma não ser teorema, é a própria G_T. Assim,

G_T : ~Teo_T([G_T]),

Temos, pois, que a fórmula G_T afirma sua própria indemonstrabilidade.

BIBLIOGRAFIA

ALENCAR FILHO, Edgar de, **Iniciação à Lógica Matemática**. São Paulo: Nobel, 203 p., 1982.

BARROSO, Cícero Antônio e IMAGUIRE, Guido, **Lógica**: Os Jogos da Razão. Ceará: Editora Universidade Federal do Ceará, 321 p., 2006.

ARISTÓTELES. Órganon: Categorias, Da Interpretação, Analíticos Anteriores, Analíticos Posteriores, Tópicos, Refutações Sofísticas. Tradução, textos adicionais e notas de Edson Bini, Bauru-SP: Edipro, 2005. 608 p.

BLANCHÉ, Robert, **História da Lógica de Aristóteles a Bertrand Russell**. Lisboa: Edições 70, s.d. Tradução, por António J. P. Ribeiro do original **La Logique et son Histoire**: d'Aristote a Russell. Paris: Librairie Armand Colin, 1970.

BLANCHÉ Robert, DUBUCS, J. **História da Lógica**, Edições 70, Lisboa, s.d. Tradução do original **La Logique et son Histoire**, Armand Colin, Paris, 1996.

BOCHEŃSKI, I.M., **Historia de la Lógica Formal**. Madri: Gredos, 1966. Tradução espanhola por Millán Bravo Lozano do original **Formale Logik**. Freiburg/Müchen: Verlag Karl Alber, 1956.

CASTRUCCI, Benedito, **Introdução à Lógica Matemática.** São Paulo: Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (Distribuído por Nobel S.A.), 223 p., 1973.

DAGHLIAN, Jacob, **Lógica e Álgebra de Boole**. São Paulo: Atlas, 165 p., 1995.

FEITOSA, Hércules de Araújo; NASCIMENTO, Mauri Cunha do; ALFONSO, Alexys Bruno, **Teoria dos Conjuntos**: Sobre a Fundamentação Matemática e a Construção de Conjuntos Numéricos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2011.

FEITOSA, Hércules de Araújo & PAULOVICH, Leonardo, **Um prelúdio à Lógica.** São Paulo: Fundação Editora UNESP, 2005.

FISHER, Alec, **A Lógica dos Verdadeiros Argumento**. São Paulo: Novo Conceito Editora, 332 p., 2008.

FREGE, Gottlob, **Sobre a Justificação de uma Conceitografia**. São Paulo: Abril Cultural, 1983 (Coleção Os Pensadores). Tradução, por Luís Henrique dos Santos, do original **Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift**, artigo inserido na obra **Funktion, Begriff, Bedeutung**. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1969.

FREGE, Gottlob, **Lógica e Filosofia da Linguagem**. São Paulo: EdUSP, 2009. Seleção, introdução, traduação e notas de Paulo Alcoforado – 2ª ed. amp. e rev., 2009.

GOLDSTEIN, Rebeca. **Incompletude**. São Paulo: Companhia das Letras, 2008. 242 p.

GRANGER, Gilles-Gaston, **Lógica e Filosofia das Ciências.** São Paulo: Melhoramentos, 296 p., 1955.

KNEALE, William, KNEALE, Marta, **O Desenvolvimento da Lógica.** Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, s.d. Tradução por M. S. Lourenço do original **The Development of Logic**. Oxford: The Clarendon Press, 1962.

HAACK, Susan, **Filosofia das Lógicas.** São Paulo: Fundação Editora UNESP, 360 p., 2002. Tradução integral, por Cezar Augusto Mortari e Luiz Henrique Araújo Dutra do original **Philosophy of Logics**, Cambridge University Press, 1978.

HEGEL, Georg Wilhelm Friedrich, **Enciclopédia das Ciências Filosóficas em Compêndio (1930) – Volume 1 – A Ciência da Lógica**. São Paulo: Loyola, 1995.

LIPSCHUTZ, Seymour, **Teoria dos Conjuntos**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, *x*-337 p., 1972, Tradução integral, por Fernando Vilain Heusi Da Silva, do original **Set Theory and Related Topics**, Nova York: McGraw-Hill, Inc., 1963.

PINTO, Paulo Roberto Margutti, **Introdução à Lógica Simbólica**, Belo Horizonte: Editora UFMG, 2001, 339 p.

MENDELSON, E. **Introduction to Mathematical Logic**. 4. ed. (acrescida) Chapman & Hall, 1997. *x*-440 p.

MATES, Benson, **Lógica Elementar.** São Paulo: Companhia Editora Nacional, *xv*-298 p., 1968. Tradução integral, por Leônidas H. B. Hegenberg e Octanny Silveira Mota, de **Elementary Logic,** New York: Oxford University Press, Inc., 1965

MORTARI, Cezar Augusto, **Introdução à Lógica**. São Paulo: Fundação Editora UNESP, 393 p., 2001.

NOLT, John & ROHATYN, Dennis, **Lógica**. São Paulo: McGraw-Hill, 596 p.,1991. Tradução integral, por Mineko Yamashita, com revisão técnica de Leila Zardo Puga, do original **Schaum's Outline of Theory and Problems of Logic**, McGraw-Hill & Makron Books, 1988.

TASSINARI, R. P. Lógica como Cálculo Raciocinador – Texto produzido para a Redefor Filosofia, 2011 (veja link no site www.marilia.unesp.br/ricardotassinari).

Apêndice: A Lógica e as Lógicas – Sobre a Noção de Sistema Formal e o Princípio da Liberdade Lógica

A Lógica e as Lógicas: Sobre a Noção de Sistema Formal e o Princípio da Liberdade Lógica[1]

Ricardo Pereira Tassinari
Itala M. Loffredo D'Ottaviano

Introdução: a noção de sistema formal

De forma geral e resumida, para tratarmos da noção de sistema formal, a *Lógica* pode ser definida como o estudo das formas dos argumentos válidos.

Lembremos que um argumento, que parte de certas asserções (chamadas de *premissas* do argumento) e chega a uma asserção final (chamada de *conclusão* do argumento), é *válido* (por definição), se a conclusão segue necessariamente das premissas.

Em sentido amplo, essa é a própria definição de silogismo dada por Aristóteles (2005, p. 347):

[1] Apoio FAPESP.

O silogismo é um discurso argumentativo no qual, uma vez formuladas certas coisas [as premissas], alguma coisa distinta destas coisas [a conclusão] resulta necessariamente através delas pura e simplesmente.[2]

Podemos dizer, ainda de forma geral, que explicitar esse "necessariamente", ou mais exatamente, a *necessidade lógica* (por vezes denominada de *inferência válida* ou *inferência lógica*), foi, e continua sendo, um dos principais objetivos da Lógica.

Além disso, a partir de uma caracterização da necessidade lógica, estudamos também, na Lógica, os sistemas axiomáticos, que servem à sistematização de uma área do conhecimento na qual necessitamos de deduções e demonstrações. Vejamos então o que vem a ser o sistema axiomático a partir de algumas definições introduzidas informalmente para depois mostrar uma caracterização formal das mesmas.

Em geral, assumimos que uma *dedução* de uma asserção (chamada de *conclusão da dedução*) a partir de outras asserções (chamadas de *premissas da dedução*) é um argumento válido (sendo as premissas e conclusão da dedução, respectivamente, as premissas e conclusão do argumento).

Na sistematização de uma área do conhecimento, como as deduções sempre se apóiam em asserções anteriores, devemos aceitar determinadas asserções como primeiras para não cairmos em um regresso infinito; essas primeiras asserções, que aceitamos sem delas ter uma dedução, são chamadas de *axiomas.*

A partir dos axiomas, *regras de inferência* estabelecem então como passar de uma asserção à outra, em deduções e demonstrações, gerando asserções chamadas de *teoremas.* Notemos que as regras de inferência também são argumentos válidos.

Uma *demonstração* de uma asserção (ou seja, de um *teorema*) é uma dedução dessa mesma asserção a partir apenas dos axiomas.

Assim, axiomas, deduções, demonstrações e teoremas são partes integrantes dos sistemas axiomáticos estudados pela Lógica.

Contemporaneamente, para o estudo da forma dos argumentos válidos e dos sistemas axiomáticos, elaborou-se um recurso de análise,

[2] Tópicos I.1.100a 25, cf. também Analíticos Anteriores I.1.24b e Refutações Sofísticas 1.165a.1

denominado sistema formal (ou teoria formal). Essa noção nasce propriamente, na Filosofia da Lógica e da Matemática, com a corrente formalista, que toma como um de seus objetos de estudos os sistemas de operações[3] sobre signos gráficos[4].

Notemos que a corrente formalista referida aqui tem em David Hilbert seu principal representante e se constitui, principalmente, a partir de reflexões sobre as grandes sistematizações da Lógica, como os trabalhos de Johann Gottlob Frege (dentre eles, *Conceitografia: uma Linguagem de Fórmulas dos Pensamentos Puros Copiada da Aritmética*, de 1879, e *Leis Fundamentais da Aritmética: Exposição do Sistema*, de 1893-1903) e de Alfred North Whitehead e Bertrand Arthur William Russell (*Principia Mathematica*, em 3 volumes, publicados entre 1910-1913)[5].

Podemos dizer que um sistema formal é a parte sintática de um sistema axiomático. Com efeito, um sistema de signos e de operações sobre eles possui tanto uma parte semântica (relativa aos significados dos signos) como uma parte sintática (que aqui será considerada como as marcas no papel usadas para representar os significados[6]). Nesse sentido, as operações sobre a parte sintática dos signos representam operações sobre a parte semântica dos signos. A idéia é então estudarmos as relações e operações semânticas a partir das relações e operações sintáticas dos signos. A vantagem desse estudo é a de substituir elementos abstratos e invisíveis por outros elementos concretos e visíveis[7] e, a partir daí, definir, de forma mais rigorosa, noções lógicas como as de dedução, consequência sintática, demonstração e teorema.

Passemos então a uma definição geral de sistema formal.

---

[3] Ao leitor mais especializado na área, observamos que o termo *operação*, neste trabalho, designa uma função matemática parcial; *i.e.*, uma função f que associa, a cada elemento (ou lista de elementos) de um domínio D, para o qual f está definida, um elemento de D, podendo não estar definida para todo elemento (ou lista de elementos) de D.

[4] Cf. Bocheński (1966, p. 299, 306-307).

[5] Cf. Kneale, W. e Kneale, M. (1962, p. 697) e Bocheński (1966, p. 299).

[6] Distinguem-se, relativamente à parte sintática de um signo, *tipo* e *ocorrência* (em Inglês, *type* e *token*). Por exemplo, para um mesmo tipo "u" podemos ter várias ocorrências, como no caso da palavra "Curupira". Podemos então operar sobre os tipos operando sobre as ocorrências.

[7] Cf. Frege (1983) e Shoenfield (1967, p.2).

Definição 1: Um sistema formal (ou teoria formal) se constitui dos seguintes elementos.

1. Um conjunto de signos, chamado de *alfabeto* do sistema formal. Dado o alfabeto do sistema formal, podemos definir seu conjunto de expressões, sendo que uma *expressão* do sistema formal é qualquer sequência finita de signos do alfabeto.
2. Um subconjunto do conjunto de expressões do sistema formal, cujos elementos são denominados de *fórmulas-bem-formadas* do sistema formal ou, simplesmente, de *fórmulas* do sistema formal (a *linguagem* do sistema formal constitui-se então do alfabeto e das fórmulas do sistema formal).
3. Um subconjunto do conjunto de fórmulas do sistema formal, cujos elementos são denominados de *axiomas* do sistema formal.
4. Um conjunto de relações entre fórmulas do sistema formal, que são chamadas de *regras de inferência* do sistema formal (as *premissas* ou *hipóteses* da regra de inferência são as fórmulas às quais se aplica a regra para, a partir delas, obter-se uma nova fórmula, chamada de *conclusão*, ou *consequência imediata,* da regra de inferência)[8].

Em um sistema formal, os axiomas são, usualmente, classificados em *axiomas lógicos e axiomas não-lógicos,* que correspondem, respectivamente, na Lógica Tradicional[9], aos axiomas e postulados de uma teoria[10], distinção essa que remonta ao próprio Aristóteles[11]. Podemos dizer, em poucas palavras, que os axiomas lógicos são "as verdades da Lógica", enquanto os axiomas não-lógicos são "as verdades do domínio particular estudado".

Dados os elementos de um sistema formal **S**, podemos então definir, rigorosamente, as noções de demonstração, teorema, dedução e consequência sintática. Terminemos esta seção introduzindo estas definições.

---

[8] Notemos que as regras de inferência são operações sobre fórmulas (no sentido empregado na Nota 1) e, consequentemente, operações sobre signos (pois, estamos considerando que uma expressão, isto é, uma sequência de signos, ainda é um signo).

[9] Usaremos, como se faz habitualmente, o termo *Lógica Tradicional* para designar a teoria lógica de Aristóteles (principalmente a teoria dos silogismos) e suas posteriores sistematizações.

[10] Cf. Eves (2004, p. 179).

[11] Cf. Aristóteles (Analíticos Posteriores 72a, 2005, p.255).

Definição 2: Uma demonstração de uma fórmula *B* em um sistema formal **S** é uma sequência de fórmulas $F_1, \ldots, F_n$ do sistema formal tal que:

1. Cada uma das F_i $(1 \leq i \leq n)$:

a) ou é um axioma do sistema formal **S**;

b) ou é uma consequência imediata de alguma regra de inferência de **S** a partir de fórmulas anteriores na sequência;

2. F_n é a própria fórmula *B*.

Definição 3: Um *teorema* do sistema formal **S** é qualquer fórmula para a qual existe uma demonstração em **S**.

Definição 4: Uma *dedução*, no sistema formal **S**, de uma fórmula *B* (chamada de *conclusão* da dedução) a partir de um conjunto Γ de fórmulas de **S** (chamadas de *premissas* ou *hipóteses* da dedução) é uma sequência de fórmulas $F_1, \ldots, F_n$ de **S** tal que:

1. Cada uma das F_i $(1 \leq i \leq n)$:

a) ou é uma fórmula de Γ;

b) ou é um axioma do sistema formal **S**;

c) ou é uma consequência imediata de alguma regra de inferência de **S** a partir de fórmulas anteriores da sequência;

2. F_n é a própria fórmula *B*.

Definição 5: Em um sistema formal **S**, uma fórmula *B* é uma *consequência sintática*, de um conjunto Γ de fórmulas de **S** se, e somente se, existe uma dedução de *B*, em **S**, a partir de Γ.

Em geral, escrevemos:

$$\vdash_S B$$

para denotar a existência de uma dedução, em **S**, da fórmula *B* a partir das fórmulas do conjunto Γ de fórmulas;

$$\Gamma, B \vdash_{S} C$$

para denotar a existência de uma dedução, em **S**, da fórmula *C* a partir da fórmula *B* e das fórmulas do conjunto Γ de fórmulas; e

$$\vdash_{S} B$$

para denotar que *B* é teorema de **S** (a idéia aqui é que a demonstração é um caso particular da dedução, uma dedução a partir de um conjunto vazio de premissas, e que $\vdash_{S} B$ denota que existe uma demonstração para *B*, ou seja, *B* é teorema de **S**)[12].

Lógica contemporânea: a lógica e as lógicas

Introduzidas as definições de sistema formal, demonstração, teorema, dedução e consequência sintática em um sistema formal, podemos, então, discutir o papel dos sistemas formais na Lógica Contemporânea e sua relação com alguns usos do termo "lógica".

Como vimos, em geral, em um sistema formal ou teoria formal, os axiomas são divididos em axiomas lógicos e axiomas não-lógicos, sendo que os axiomas não-lógicos dizem respeito ao domínio específico do conhecimento que sistematizamos com a teoria. No caso de não termos axiomas não-lógicos, todos os axiomas do sistema formal são axiomas lógicos, o que significa que esses axiomas, juntamente com as regras de inferência, regulam as inferências válidas (demonstrações e deduções) e determinam as proposições demonstráveis (os teoremas) e, portanto, definem formalmente *a lógica estudada.*

Assim, a noção de sistema formal permite introduzir uma primeira acepção usual do termo "lógica":

[12] Notemos que, como as regras de inferência são operações sobre signos (confira Nota 6 acima), a demonstração e a dedução podem ser consideradas ainda operações sobre signos (que partem das premissas e dos axiomas e resultam, respectivamente, em teoremas e consequências sintáticas); o signo "$\vdash_{S}$", usado nos três casos acima, denota então a possibilidade de realização dessas operações.

Uma lógica, em sentido estrito, é um sistema formal

Com efeito, tanto Frege quanto Russell, nas obras citadas na seção anterior, propuseram sistemas formais que pretendiam sistematizar o conhecimento lógico e, também, parte do conhecimento matemático[13]. Já na Conceitografia (*Begriffsschrift*) de Frege, que exibe um sistema sintático que representa operações semânticas válidas realizadas na Lógica, podemos encontrar a crença de que a Lógica se deixaria expressar por um único sistema formal[14]. Mas a questão da existência de um único sistema formal para a Lógica se apresentou mais complexa do que parecia à primeira vista, como mostrará o desenvolvimento histórico posterior da Lógica.

Comentemos, então, a questão dos princípios lógicos, que nos sistemas formais são expressos pelos axiomas lógicos.

Na Lógica Tradicional, uma das exigências que se fazia em relação aos seus axiomas lógicos é que esses fossem auto-evidentes[15]. Dessa forma, os axiomas seriam imediatamente aceitos por qualquer um e não precisariam de demonstrações, o que evitaria uma regressão ao infinito para justificá-los, e garantiriam a veracidade das proposições apoiadas sobre eles. Porém, o critério para se determinar o que é ou não auto-evidente foi sofrendo uma extensão que, aos poucos, foi descaracterizando-o.

Um momento importante dessa descaracterização foi o da descoberta, por Bertrand Russell, da possibilidade de derivação de uma contradição no *Leis Fundamentais da Aritmética: Exposição do Sistema* de Frege[16]. Frege, em um *Postscriptum* ao segundo volume da obra[17], reconhece a existência do problema e expõe um outro paradoxo que ficará conhecido, posteriormente, como o *Paradoxo de Russell* (mas que, na verdade, é diferente daquele que Russel relata em sua carta). Expomos, a seguir, o Paradoxo de Russel em uma versão contemporânea.

[13] Ambos são considerados, na Filosofia da Lógica e da Matemática, representantes da corrente logicista, justamente por acreditar que conhecimentos matemáticos fundamentais (*e.g.* da Aritmética) poderiam ser deduzidos das sistematizações da Lógica propostas por eles.

[14] Podemos encontrar raízes dessa concepção na *lingua characteristica universalis* e no *calculus ratiocinator* de Leibniz. (Cf. Granger (1955), Blanché (1985), Kneale, W. e Kneale, M. (1962)).

[15] Cf. Aristóteles (2005, p. 254-255).

[16] A tradução da carta em que Russell comunica a Frege sua descoberta pode ser encontrada em Carta... (2012).

[17] Cf. Kneale, W. e Kneale, M. (1962, p. 659-660).

Parece auto-evidente que podemos assumir que a todo predicado está associada sua extensão, isto é, a classe dos objetos que o satisfazem. Assim, por exemplo, ao predicado "homem" está associada a classe dos homens. Vamos chamar tal classe de H. Por outro lado, temos que a classe dos homens não é um homem e, assim, a classe dos homens não pertence a si própria, ou seja, em uma notação contemporânea, $H \notin H$. Podemos então considerar o predicado "classe que não pertence a si própria" que, em notação contemporânea, pode ser expresso pela fórmula "$x \notin x$", ou seja, a classe x não pertence a x. Vamos chamar de R (em homenagem a Russell) a seguinte classe:

$$R = \{x \mid x \notin x\}.$$

Ou seja, R é a classe de todas as classes que não pertencem a si próprias. Podemos agora perguntar: R é uma classe que pertence a si própria, ou seja, $R \in R$? Ora, um elemento x pertence a R se, e somente se, não pertence a si próprio, ou seja, $x \notin x$; em signos:

$$x \in R \Leftrightarrow x \notin x.$$

A resposta a nossa pergunta é então:

$$R \in R \Leftrightarrow R \notin R,$$

o que é uma contradição!

Portanto, não é verdadeiro que a todo predicado está associada sua extensão, contrariando a aparência de auto-evidência evocada para justificar esse princípio.

A partir daí, como nos diz Haack (2002, p.36, grifo do autor):

> A resposta de Frege à descoberta da inconsistência foi admitir que ele nunca tinha realmente pensado que o axioma relevante fosse *tão* auto-evidente quanto os outros – um comentário que bem pode levar a um saudável ceticismo a respeito do conceito de auto-evidência.

Se a auto-evidência dos princípios assumidos foi se mostrando cada vez mais fraca e, também, difícil de ser caracterizada, por outro lado, a partir da meta-reflexão a respeito dos sistemas lógicos percebeu-se a possibilidade de se assumir outros princípios lógicos.

Com efeito, se podemos por em questão certos princípios, é porque eles não se mostram como necessários – “necessário” equivalendo a “não é possível ser de outra forma”. E como um princípio (axioma) não pode ser demonstrado (pois, se o fosse, não seria verdadeiramente um “princípio”), neste caso, só resta uma argumentação retórica para justificá-lo. Aí começa a *possibilidade* de se ter diversos sistemas formais e, a partir daí, diversas lógicas[18].

Para citar um exemplo, consideremos um dos princípios basilares da Lógica Clássica, o Princípio da Não-Contradição, segundo o qual nenhuma proposição pode ser, ao mesmo tempo, verdadeira e falsa. Notemos que este princípio não pode ser demonstrado, por se tratar de um princípio. Notemos ainda que um princípio lógico deve se aplicar à totalidade das proposições e basta que se admita apenas um caso em que o princípio não valha, para que, portanto, ele deixe de ser um princípio. No caso do Princípio da Não-Contradição, se *admitirmos de fato* que há uma proposição que é verdadeira e falsa ao mesmo tempo, como por exemplo, o Paradoxo do Mentiroso[19], então, o Princípio da Não-Contradição deixa de valer para nós. Neste caso, deixam de valer algumas regras de inferência da Lógica Clássica, derivadas, como por exemplo, que de uma contradição tudo segue (que tem o belo nome latino *ad falsum quod libitum* ou, também, *ex contradictio sequitur quodlibet*). A partir daí, podemos elaborar sistemas em que a existência de contradições não torne os sistemas triviais, que são exatamente os sistemas chamados de *paraconsistentes*[20].

Mais ainda, como a linguagem do sistema formal é artificial e convencional, a aceitabilidade dos axiomas e das regras de inferência depende também da interpretação de cada um dos signos[21], ou seja, do que

[18] Para uma introdução a História da Lógica e o surgimento das lógicas não-clássicas, consulte D’Ottaviano e Feitosa, 2003.

[19] De forma resumida podemos explicar a admissão da existência do Paradoxo do Mentiroso da seguinte forma: seja “Paradoxo do Mentiroso” o nome dado à sentença “O Paradoxo de Mentiroso é falso”. Admitimos então que essa sentença existe, já que a estamos exibindo, e que ela expressa uma proposição que é exatamente sua própria negação. Uma rápida análise nos mostra então que o Paradoxo do Mentiroso é verdadeiro se, e somente se, é falso, o que é uma contradição. Assim, se assumimos que o Paradoxo do Mentiroso existe e expressa sua negação, assumimos que existe uma contradição.

[20] Notemos que a paraconsistência nos permite admitir a existência do Paradoxo do Mentiroso sem que da existência dessa contradição infiramos que tudo pode ocorrer, pela regra do *ad falsum quod libitum*; na visão dos autores, é uma expressão de paraconsistência na metalinguagem.

[21] Cf. Haack (2002, p. 60).

chamamos *semântica do sistema formal.* Daí a dificuldade ainda maior em se estabelecer *um único* sistema formal que expressaria toda *a* Lógica.

Por exemplo, usualmente, o signo "$\wedge$" é utilizado para indicar a conjunção de duas proposições, isto é, que duas proposições tem que ser verdadeiras simultaneamente. Assim, se temos as sentenças B e C tais que:

$B \equiv$ "O homem é racional"

$C \equiv$ "O homem é mortal"

A fórmula "$B \wedge C$" é lida como "O homem é racional e mortal".

Uma das regras da Lógica Clássica é que, da premissa "$B \wedge C$", podemos inferir "$C \wedge B$". No caso, do exemplo acima, ela significa que, da premissa "O homem é racional e mortal", podemos concluir que "O homem é mortal e racional".

Entretanto, podemos considerar que a conjunção deva representar também uma ordem temporal, como no caso em que:

$B \equiv$ "O homem vive"

$C \equiv$ "O homem morre"

Neste caso, não podemos, da premissa "$B \wedge C$", inferir "$C \wedge B$", ou seja, não podemos da premissa "O homem vive e morre", inferir que "O homem morre e vive".

Essas duas interpretações da conjunção "$\wedge$" nos permitem então ver como a aceitabilidade dos axiomas e das regras de inferência dependerá da semântica estabelecida para ela e, portanto, da semântica do sistema formal.

Com a possibilidade de existir mais de um sistema formal que expresse inferências válidas e, portanto, várias formas de pensar, a Lógica passa, então, a ser um campo de estudo dos diversos sistemas formais (*lógicas* e teorias construídas sobre elas), seus pressupostos e consequências, bem como das semânticas a eles associadas. Nesse sentido, podemos estabelecer uma segunda acepção do termo "lógica", que designaremos pelo substantivo próprio "Lógica":

A Lógica, em sentido amplo, é uma disciplina, uma ciência, um ramo do saber, na qual se estuda diversos sistemas formais, e não se constitui, necessariamente, em apenas um sistema formal.

E, por isso, em Lógica, estudamos lógicas.

Por fim, identificamos, na literatura sobre Lógica, uma terceira acepção do termo "lógica", que também é usual:

O termo "lógica", como, por exemplo, em "Lógica Modal", é empregado para indicar uma sub-área da Lógica, na qual se estuda algumas noções conexas à Lógica e alguns sistemas formais a elas relacionados.

Vemos então como o movimento histórico de análise dos elementos da Lógica levou a mudanças fundamentais na área; não apenas criando uma nova terminologia, na qual o próprio termo "lógica" recebe diferentes acepções (vimos aqui, sem pretender sermos exaustivos, três acepções usadas), mas também e principalmente modificando nossa própria forma de entender o que é a Lógica[22].

A liberdade lógica e seu princípio

Como entender então esse panorama de evolução da Lógica?

Em uma primeira aproximação, podemos dizer que, na investigação lógica, o pensar, pensando sobre si mesmo, busca regras gerais subjacentes às suas inferências particulares, buscando estabelecer as leis lógicas. Também podemos dizer que os axiomas lógicos e regras de inferência de um sistema formal são princípios que expressam essas leis lógicas. Esses princípios não são demonstráveis (pois são "princípios") e necessitam de critérios para serem estabelecidos. Em especial, na Lógica Tradicional, o principal critério é o da auto-evidência. Entretanto, a auto-evidência dos princípios assumidos foi se mostrando cada vez mais fraca e, nesse sentido, cada vez mais difícil de ser caracterizada. Na meta-reflexão a respeito dos sistemas lógicos, percebeu-se a possibilidade de assumir outros princípios lógicos. Conjuntamente a essa possibilidade, como a linguagem do sistema formal é artificial e convencional, a aceitabilidade dos axiomas e das regras

[22] Sobre os fundamentos da Lógica assim concebida, recomendamos a leitura do livro *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica* do eminente lógico brasileiro Newton da Costa (DA COSTA, 1994).

de inferência depende também da interpretação de cada um dos signos, da semântica do sistema formal. Esse cenário mostrou a impossibilidade de se estabelecer *um único* sistema formal que expressaria, de forma unânime, toda *a* Lógica. Ora, na medida em que não é possível estabelecer *um único* sistema formal que expresse toda a Lógica, vários sistemas são possíveis. Porém, para que um sistema formal seja efetivamente regulador de nossas inferências, todas as inferências realizadas devem estar no sistema formal (devem ser demonstrações e deduções possíveis de serem representadas no sistema formal).

Nesse sentido, propomos então a seguinte interpretação:

1. podemos dizer que leis lógicas são leis que o pensamento *estabelece a si* próprio;
2. mas, na medida em que ele "estabelece a si" essas leis e pode manter-se efetivamente dentro delas, então, elas se tornam, efetivamente, leis para o pensamento;
3. nesse sentido, existe o que podemos chamar de *autodeterminação do pensamento*; e
4. logo, não se pode restringir, *necessariamente*, a forma lógica do pensamento em geral àquela de um cálculo lógico particular qualquer.

Nesse sentido, a auto-referencialidade dos conceitos e regras do pensamento é *auto-instauradora*[23] e permite estabelecer mais de uma lógica para o pensamento em geral.

Denominamos essa interpretação ou esse *factum*, para usar a terminologia de Granger[24], de *Liberdade Lógica* e o princípio que afirma existir a Liberdade Lógica de *Princípio da Liberdade Lógica*.

Nossa posição pode ser interpretada, segundo as categorias estabelecidas por Haack (1998, p. 291-292), como sendo um caso de pluralismo global; aqui pluralismo significa que "há mais de um sistema lógico correto" e global significa que

[23] Com efeito, nesse caso, a autodeterminação de um sistema lógico pelo e para o pensamento é um caso particular da auto-instauração da realidade por um conhecimento filosófico tal como exposto em Tassinari, 2007, p. 240-242.

[24] Cf. Granger (1989, p. 264, 275) e Tassinari (2007, p. 242).

> […] princípios lógicos deveriam valer independentemente do assunto. Contudo [...] nega[mos] ou que os lógicos clássico e alternativo estejam realmente usando "válido"/"logicamente verdadeiro" no mesmo sentido, ou então que eles estejam realmente discordando sobre um e o mesmo argumento.

Com relação a não se poder restringir a forma do pensamento à de um *sistema axiomático*[25], notemos que não há um sistema axiomático completo já para o Cálculo de Predicados de Segunda Ordem[26] (e também para os de ordem superior, que ainda seguem princípios da Lógica Clássica, como o Princípio da Não-Contradição e o Princípio do Terceiro Excluído).

Mas, o que o Princípio da Liberdade Lógica afirma é bem mais que isso. Com efeito, o Princípio da Liberdade Lógica se expressa, em relação à constituição de sistemas formais, da seguinte forma: a escolha da linguagem estabelece o conjunto de fórmulas possíveis e esse conjunto já pode ser interpretado como um sistema formal, chamado, em geral, de *trivial*; a partir desse conjunto, temos então vários subconjuntos que, desde que tenhamos regras que permitam defini-los, essas regras também definem um sistema formal, uma lógica; podemos, a partir daí, estabelecer, para nós, que nosso pensar siga um desses sistemas formais; e, se, de fato, podemos nos manter dentro dessas regras, o sistema formal escolhido estabelece uma forma possível para o pensamento. É, portanto, a possibilidade de nos mantermos dentro das regras estabelecidas por uma lógica (sistema formal) que faz dela uma lógica possível.

Conclusão

Em resumo, podemos então considerar a Lógica como o estudo das diversas formas de expressão das leis do pensamento, enquanto livre pensamento, *i.e.*, daquele que pode dar as suas regras e torná-las efetivas. Ou ainda, na medida em que essa liberdade se estabelece pelo pensamento que se pensa a si próprio, enquanto meta-reflexão, a Lógica é o estudo das próprias formas do (auto)pensamento livre.

---

[25] Em termos mais técnicos o termo "sistema axiomático" indica "sistema formal recursivamente axiomatizável".

[26] Cf. Mendelson, 1997, p. 376.

Vemos assim, porque, nesse estudo, tornou-se importante e uma tarefa quase que obrigatória a um lógico contemporâneo que propõe uma nova lógica, não apenas determinar se um sistema formal **S** proposto é *decidível* – *i.e.*, se, para toda fórmula *F*, existe um método efetivo (algoritmo) para decidir se *F* é ou não um teorema de **S** –, mas também determinar o quanto **S** "cobre" do campo semântico que sistematiza, ou seja: estudar o que se chama usualmente de *correção e de completude* do sistema formal **S** em relação a uma semântica para **S**[27].

Podemos, então, dizer que a Lógica se nutre dos diversos resultados sobre os sistemas formais. E, enquanto o estudo do autopensamento livre, a Lógica se torna cumulativa e descobridora de suas próprias formas[28].

Notemos que essa concepção não está necessariamente em contradição com uma concepção platônica, usual na Lógica e na Matemática, da existência atual de um universo das formas (possíveis). Com efeito, nesse universo encontramos, também, as diversas formas dos sistemas formais e, portanto, as diversas formas do autopensamento estudadas pela Lógica; e o Princípio da Liberdade Lógica ainda se mantém válido na medida em que, apesar de se encontrarem no universo das formas possíveis, essas formas seriam aquelas do autopensamento, que ele explicita para si através de suas próprias escolhas.

Por último, podemos dizer que a Lógica enquanto disciplina caminhou, em seu movimento histórico, desde Aristóteles até o período contemporâneo, no sentido de se descobrir como estudo das formas válidas do autopensamento livre, ou seja, de efetivar e descobrir o Princípio da Liberdade Lógica.

---

[27] Para introduzir aqui as definições de correção e completude, podemos dizer, de forma bem geral e abstrata, que *estabelecer uma semântica* para um sistema formal **S** significa definir uma propriedade $\mathbb{P}$ para as fórmulas de **S**. Denotaremos, nesse caso, essa semântica por $\mathbb{S}_{\mathbb{P}}$. Por exemplo, no caso da Lógica Proposicional Clássica, a propriedade $\mathbb{P}$ é *ser uma tautologia*, *i.e.*, ser verdadeira em todos os casos possíveis de veracidade e falsidade das proposições atômicas que compõe a fórmula e, no caso da Lógica de Primeira Ordem, a propriedade é *ser válida*. Temos, então, as seguintes definições. *Definição.* Um sistema formal **S** é *correto, em relação a uma semântica* $\mathbb{S}_{\mathbb{P}}$, se todo e qualquer teorema de **S** tem a propriedade $\mathbb{P}$. *Definição.* Um sistema formal **S** é *completo, em relação a uma semântica* $\mathbb{S}_{\mathbb{P}}$, se toda e qualquer fórmula de **S** que tem a propriedade $\mathbb{P}$ é teorema de **S**.

[28] Podemos aqui identificar diferentes tipos de processos auto-organizados, porém reservamos para outros trabalhos a discussão mais detalhada desse tópico. Para uma discussão sobre Lógica e Auto-Organização, cf. Tassinari (2003).

Referências

ARISTÓTELES. *Órganon*: categorias, da interpretação, analíticos anteriores, analíticos posteriores, tópicos, refutações sofísticas. Tradução, textos adicionais e notas de Edson Bini. Bauru: Edipro, 2005.

BLANCHÉ, R. *História da lógica de Aristóteles a Bertrand Russell*. Trad. de António J. P. Ribeiro. Lisboa: Edições 70, 1985.

BLANCHÉ R.; DUBUCS, J. *História da Lógica***.** Lisboa: Edições 70, 1996.

BOCHEŃSKI, I. M. *Historia de la lógica formal*. Trad. de Millán Bravo Lozano. Madri: Gredos, 1966.

CARTA de Frege para Russell. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/fregerussel/segundapagina.htm>. Acesso em: 20 out. 2012.

DA COSTA, N. C. A. *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*. 2. ed. São Paulo: Hucitec, 1994.

D'OTTAVIANO, I. M. L.; FEITOSA, H. de A. *Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas*. 2003. Disponível em: Disponível em: <ftp://ftp.cle.unicamp.br/pub/arquivos/educacional/ArtGT.pdf>. Acesso em: 12/12/12.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Trad. de Higyno H. Domingues Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

FREGE, G. Sobre a justificação científica de uma conceitografia. In: PEIRCE, C. S.; FREGE, G. *Escritos coligidos, Sobre a justificação científica de uma conceitografia, Os fundamentos da aritmética*. São Paulo: Abril Cultural, 1983. (Os Pensadores, 3ª ed.) p. 177-276

______. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschiftlich abgeleitet*. Iena: Pohle, 1903. v.2.

______. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschiftlich abgeleitet*. Iena: Pohle, 1893. v.1.

______. *Begriffsschift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle: Nebert, 1869.

GRANGER, G.-G. *Por um conhecimento filosófico*. Trad. de Constança Marcondes Cesar e Lucy Moreira César. Campinas: Papirus, 1989.

______. *Lógica e filosofia das ciências*. São Paulo: Melhoramentos, 1955.

KNEALE, W.; K., M. *O desenvolvimento da lógica***.** Trad. de M. S. Lourenço. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1962.

MENDELSON, E. *Introduction to mathematical logic*. 4. ed. London: Chapman & Hall, 1997.

HAACK, S. *Filosofia das lógicas*. Trad. de Cezar Augusto Mortari e Luiz Henrique Araújo Dutra. São Paulo: Ed. da Unesp, 2002.

SHOENFIELD, J. R. *Mathematical logic*. Boston: Addison-Wesley, 1967. (Addison-Wesley Series in Logic).

TASSINARI, R. Ciência cognitiva: ciência ou filosofia? In: BROENS, M. C.; COELHO, J. G.; GONZALEZ M. E. Q. *Encontro com as ciências cognitivas*. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2007. (Encontro com as Ciências Cognitivas, 5).

______. *Incompletude e auto-organização:* sobre a determinação de verdades lógicas e matemáticas. 2003. 238 f. Tese (Doutorado em Filosofia) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.