HÁ UMA DEFINIÇÃO ABSOLUTA DE QUANTIFICADORES?
IS THERE AN ABSOLUTE DEFINITION OF QUANTIFIERS?

Angela Pereira Rodrigues*

Resumo: Este trabalho expõe os esforços de diversos pensadores que contribuíram com estudos sobre quantificadores. Desde Aristóteles, que já trabalhava com os quantificadores universal e existencial; Frege e Pierce que desenvolveram teorias para tratar dos quantificadores; teorias sobre quantificadores generalizados, mais especificamente as teorias de Mostowski (1957) e Barwise e Cooper (1981); discussões em relação às abordagens dos quantificadores e definições vindas de dicionários. Defende-se que não há uma definição absoluta que abranja todos os quantificadores, nem formalmente, nem na linguagem natural.

Palavras-chave: Quantificadores. Quantificadores generalizados de Mostowski. Quantificadores generalizados de Barwise. Cooper.

Abstract: This paper exposes the efforts of various thinkers who contributed to the studies on quantifiers. Since Aristotle, who worked with the universal and existential quantifiers; Frege and Pierce who developed theories for dealing with quantifiers; theories about generalized quantifiers, specifically Mostowski's theory (1957) and Barwise and Cooper's theory (1981); discussions regarding the approaches of quantifiers and definitions come from dictionaries. It is argued that there is no absolute definition covering all quantifiers, neither formally nor in natural language.

Keywords: Quantifiers. Generalized quantifiers of Mostowski. Generalized quantifiers of Barwise. Cooper.

1 Origem dos quantificadores

Segundo Westerståhl (2005), Aristóteles [384-322 a. C.] inventou a lógica e introduziu o estudo sobre a quantificação como parte essencial da lógica. Aristóteles ao trabalhar com os silogismos categóricos tratou do estudo formal do significado das propriedades de quatro expressões de quantificadores básicas: 'todo', 'nenhum', 'algum' e 'algum não' (que são respectivamente as sentenças categóricas chamadas: afirmação universal, negação universal, afirmação particular e negação particular).

Ainda de acordo com Westerståhl (2005), o quadrado das oposições de Aristóteles é um estudo das várias formas de negação combinadas com expressões de quantificadores. Westerståhl (2005) acredita que estes primeiros estudos de Aristóteles foram decisivos para o

* Faculdade de Filosofia e Ciências – Universidade Estadual Paulista – angela.p.rodrigues@bol.com.br

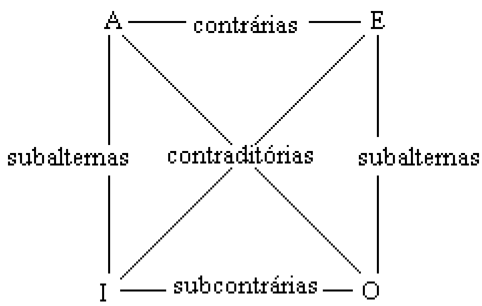
estudo na área da quantificação, mesmo que a teoria dos silogismos categóricos seja muito fraca para expressar diversos raciocínios interessantes.

Para um melhor entendimento, exporemos de maneira sucinta os principais conceitos envolvidos na teoria dos silogismos categóricos. Utilizamos nesta teoria as chamadas *sentenças categóricas*, das quais nos referimos acima como expressões de quantificadores, que são da forma Sujeito-Predicado. As sentenças categóricas são constituídas por apenas quatro tipos básicos:

(A) Afirmação universal: “Todo S é P”;
(E) Negação universal: “Nenhum S é P”;
(I) Afirmação particular: “Algum S é P”;
(O) Negação particular: “Algum S não é P”.

Segundo Feitosa e Paulovich (2005), as letras A e I, que servem para indicar as sentenças categóricas afirmativas, e as letras E e O, que servem para indicar as sentenças categóricas negativas, referem-se, respectivamente, às primeiras vogais das palavras ***a**ff**i**rmo* e *n**e**g**o***.

A título de curiosidade mostramos a seguir o *quadrado das oposições*:



As sentenças categóricas A e O bem como as sentenças categóricas E e I são *contraditórias*, o que significa que não podem ser, simultaneamente, ambas verdadeiras e ambas falsas. As sentenças categóricas A e E são *contrárias*, isto é, não podem ser ambas verdadeiras, porém, podem ser ambas falsas. As sentenças categóricas I e O são sentenças *subcontrárias*, ou seja, não podem ser ambas falsas, mas podem ser ambas verdadeiras. Finalmente, as sentenças categóricas A e I assim como as sentenças categóricas E e O são *subalternas*, o que significa que se A é verdadeira, então I também é verdadeira; e que se E é verdadeira, então O também é verdadeira.

Aristóteles examinou detalhadamente os *silogismos*, argumentos que consistem de duas premissas e uma conclusão, em que tanto as premissas quanto a conclusão são sentenças categóricas. Silogismo, segundo Machado e Cunha (2005), é uma palavra de origem grega, *súllogos*, que significa reunião, ação de recolher, de reunir palavras ao raciocinar.

Todas as sentenças categóricas possuem dois *termos*, o sujeito e o predicado. Um silogismo contém unicamente três termos. As duas premissas envolvidas num silogismo não podem ser totalmente desvinculadas, pois devem apresentar um termo em comum, dito *termo médio*, termo este que não deve aparecer na conclusão. Cada premissa contém um termo comum com a conclusão. O sujeito da conclusão é chamado de *termo menor* e o predicado da conclusão é denominado por *termo maior*. Segue abaixo um exemplo de silogismo categórico:

Todo animal é mortal.
<u>Todo homem é animal.</u>
Todo homem é mortal.

Neste exemplo, ‘animal’ é o termo médio, ‘homem’ é o termo menor e ‘mortal’ é o termo maior.

A lógica aristotélica foi considerada acabada por Kant, em sua obra *Crítica da Razão Pura*, de 1787, porém ela sofreu uma grande transformação no século XIX através dos trabalhos de lógicos como: George Boole [1815-1864], Augustus De Morgan [1806-1971], Charles Sanders Peirce [1839-1914], Gottlob Frege [1845-1925], Giuseppe Peano [1858-1932], Bertrand Russell [1872-1970], entre outros.

Krause (2009) destaca que Gottfried Leibniz [1646-1716] percebeu que a teoria dos silogismos categóricos não era suficiente para dar conta dos tipos de inferência feitos na matemática. Ademais, Krause (2009) fala do estranho fato dos matemáticos não mencionarem Aristóteles, inclusive Euclides [325-265 a. C.] que em sua obra ‘Elementos’ escreve sobre a geometria de forma dedutiva e utiliza plenamente argumentos lógicos. Pode ser devido a que, ao contrário do que pensava Aristóteles, a teoria dos silogismos categóricos seria um esquema geral que não conseguiria tratar as particularidades de cada ciência.

Mesmo raciocínios simples não podem ser feitos na teoria do silogismo. O argumento, dado por Krause (2009), em que temos a premissa ‘Toda vaca é um animal’ e a conclusão ‘Todo chifre de vaca é chifre de um animal’ não é válido na teoria dos silogismos categóricos, embora seja um raciocínio coerente.

Para Westerståhl (2005) o interessante da teoria proposta por Aristóteles é que as expressões de quantificadores possuem dois termos e podemos vê-las como relações binárias sintática e semanticamente. Isto porque os termos são conjuntos de indivíduos e, desta forma, a expressão 'alguns' pode ser vista como a intersecção não-vazia entre dois conjuntos e a expressão 'todo' pode significar a relação de inclusão. Estas relações são entre conjuntos de indivíduos e não entre indivíduos. Isto significa que estas relações são de segunda ordem. Logo, estes quantificadores, vistos desta maneira, são os quantificadores generalizados: alguns e todos (em um dado universo).

Como ainda não foi vista nenhuma teoria sobre quantificadores generalizados, daremos a definição de acordo com Benthem (1983): um *quantificador generalizado* denota uma função D que atribui, para todo universo E, alguma relação binária entre seus subconjuntos. Desta forma, em um modelo com universo E, *todo* XY denota a sentença $X \subseteq Y$, *nenhum* XY denota a sentença $X \cap Y = \varnothing$ e assim por diante.

Westerståhl (2005) diz que outro nome importante quando se fala da teoria da quantificação, mais especificamente da teoria dos quantificadores generalizados, é Gottlob Frege.

Com Frege surge uma visão linguística da lógica. Frege por um lado introduziu a linguagem formal da lógica de predicados (conectivos, identidade e os quantificadores universal e existencial) e, por outro, segundo Westerståhl (2005), "formulou explicitamente a noção abstrata de um quantificador como uma relação de segunda ordem".

Para Westerståhl (2005), a única distinção que existe entre os quantificadores como relação de segunda ordem de Frege e a noção moderna de quantificador generalizado se deve ao fato que Frege desconhecia a noção de modelo.

Hintikka e Sandu (1994) dizem que Frege e Peirce propuseram e desenvolveram independentemente as bases para a teoria da quantificação com abordagens distintas.

De acordo com Frápolli Sanz (2007), a teoria da quantificação como a conhecemos surge pela primeira vez em 1879, na obra *Conceptografia* de Frege, apesar de que as expressões 'quantificadores' e 'lógica de primeira ordem', com o significado contemporâneo, foram escritas primeiramente por Peirce em 1883.

As abordagens de Frege e Peirce são distintas, para Hintikka e Sandu (1994), porque Frege fez uma formalização com a intenção da criação de uma linguagem universal da matemática, ou até mesmo para o pensamento humano em geral, com uma linguagem livre de ambiguidades e demais imperfeições próprias das linguagens naturais. Porém, Peirce pensou na teoria dos quantificadores e na notação envolvida apenas como um dos muitos dispositivos lógicos. Para Peirce os quantificadores tinham significado não por sua relação com a linguagem natural, nem por alguma compreensão preexistente, mas por determinados jogos que podem ser jogados com os quantificadores e que servem para interpretá-los.

Discutiremos um pouco mais sobre o trabalho de Frege com relação aos quantificadores, segundo Frápolli Sanz (2007).

Primeiramente, devemos lembrar que inúmeros lógicos contribuíram para a lógica depois de Aristóteles e antes de Frege. Desta forma, com a concepção de lógica já desenvolvida por outros lógicos, podemos dizer que a *Conceptografia* é o primeiro tratado de lógica contemporânea e o primeiro a incorporar uma análise específica dos quantificadores. O tratamento de Frege em relação aos quantificadores necessita de dois passos prévios:

(a) Interpretação das variáveis como expressões de generalidade;
(b) Distanciamento da maneira habitual de se analisar as orações em termos de sujeito e predicado.

Quanto ao passo (a) destacamos a importância de se trabalhar com as variáveis não como uma ferramenta, mas com a compreensão do significado das variáveis. As variáveis supõem que as expressões que as incorporam sejam expressões gerais de um determinado tipo.

No passo (b), pontuamos que Frege abandonou a maneira habitual de se trabalhar com enunciados da forma Sujeito-Predicado e passou a trabalhar com as noções de funções e argumentos, pois acreditava que as relações lógicas se estabelecem não entre as próprias orações e fórmulas, mas entre o que as orações e as fórmulas dizem.

Para Frege, os quantificadores são funções em que os argumentos são funções, funções de ordem n, $n > 1$. A interpretação dos quantificadores nos diz que eles são funções monádicas, ou seja, formam uma expressão completa quando acompanha uma única função que funciona como argumento. É desta forma que os quantificadores são introduzidos na obra *Conceptografia* e que ganhou espaço na lógica de primeira ordem.

2 Quantificadores lógicos e não-lógicos

Ao consultar qualquer livro elementar de Lógica encontramos os quantificadores da lógica clássica de primeira ordem; são eles o quantificador universal “$\forall$” e o quantificador existencial “$\exists$”. A partir destes quantificadores podemos definir vários outros quantificadores, por exemplo, os quantificadores “nenhum” e “existe um único” como segue:

$$\text{Nenhum } x\ A(x) =_{df} \forall x\ \neg A(x)$$

$$\exists! x\ A(x) =_{df} \exists x\ A(x) \wedge \forall y\ (A(y) \rightarrow y = x)$$

Por mais que a partir dos quantificadores $\forall$ e $\exists$ possamos definir outros quantificadores, é notório que vários quantificadores não podem ser definidos a partir deles. A insuficiência destes quantificadores para tratar das sentenças quantificadas da linguagem natural é discutida por Barwise e Cooper (1981) nos seguintes aspectos:

- Há sentenças quantificadas nas linguagens naturais que não podem ser simbolizadas apenas pelos quantificadores da lógica clássica de primeira ordem;
- A estrutura sintática das sentenças quantificadas nas linguagens naturais e a estrutura sintática das sentenças quantificadas na lógica clássica de primeira ordem são completamente diferentes.

Barwise e Cooper (1981) justificam a existência de sentenças quantificadas nas linguagens naturais por meio das frases a seguir:

(1) (a) Existe apenas um número finito de estrelas.
(b) Nenhum coração irá bater um número infinito de vezes.
(2) (a) Mais da metade das flechas de João acertam o alvo.
(b) Mais da metade das pessoas votaram em Carter.
(3) (a) A maioria das flechas de João acertou o alvo.
(b) A maioria das pessoas votou em Carter.

Os autores dizem suspeitar que sentenças com quantificadores como as sentenças acima podem ser expressas em toda linguagem humana. Contudo, as sentenças em (1), (2) e (3) não podem ser formalizadas pelos quantificadores universal e existencial. Concluímos, assim, que uma teoria semântica para a linguagem natural não pode ser baseada apenas nos quantificadores usuais.

Podemos escrever os quantificadores utilizados acima da seguinte forma:

(1’) Finitamente muitas coisas x satisfazem A(x), ou ainda, Finito x [A(x)].

(2') Mais da metade dos x tais que B(x) satisfazem A(x), ou (mais que ½B)x [A(x)].

(3') A maioria x tal que B(x) satisfaz A(x), ou (maioria B)x [A(x)].

Considerando **E** como um conjunto não-vazio e arbitrário de indivíduos para o domínio da nossa série de variáveis, temos que na lógica clássica de primeira ordem podemos quantificar sobre os objetos de **E**, porém não sobre conjuntos arbitrários de indivíduos, funções de indivíduos em indivíduos, ou outros tipos de objetos abstratos que não são elementos de **E**. Demonstra-se facilmente utilizando a teoria de Barwise e Cooper (1981) que nenhum destes quantificadores é definido a partir dos quantificadores universal e existencial da lógica de primeira ordem (no Apêndice C13 de Barwise e Cooper, 1981) encontramos a demonstração para o caso do quantificador "mais da metade").

Para os autores, há dois caminhos para sairmos da lógica de primeira ordem. Um é uma abordagem feita pela contemporânea teoria dos conjuntos, em que se expande o domínio **E** de quantificação para um domínio maior $\mathbf{E} \cup \mathbf{A}$, em que **A** contém números e funções para subconjuntos de **E**. Outro caminho é manter a definição formal como parte da metalinguagem e tratar de quantificadores generalizados.

Os quantificadores que não podem ser definidos a partir dos quantificadores da lógica clássica de primeira ordem são chamados, segundo Barwise e Cooper (1981), *quantificadores não-lógicos*; já os que podem ser definidos por estes quantificadores são chamados *quantificadores lógicos*.

Para Frápolli Sanz (2007), Barwise e Cooper fazem esta distinção entre quantificadores lógicos e não-lógicos porque os quantificadores generalizados formam, num sentido, uma categoria sintática a parte. Os quantificadores generalizados não são considerados como expressões sincategoremáticas ou auxiliares, mas são interpretados como um tipo especial de predicado ou relação.

Na semântica da lógica clássica, os conectivos e os quantificadores não são interpretados junto com as expressões não-lógicas, ou seja, junto com as constantes individuais, os predicados e as relações. A interpretação das expressões lógicas é suficiente para avaliar a verdade das fórmulas da linguagem, pois os quantificadores clássicos juntamente com o resto das noções lógicas são invariantes de um modelo para outro. Isto não ocorre com os quantificadores generalizados. Na teoria dos quantificadores generalizados, considera-se que os quantificadores são relações entre os subconjuntos de um conjunto dado. Este conjunto funciona como o universo da quantificação. Os quantificadores generalizados, desta forma, não têm porque serem invariantes de um modelo para outro. Na verdade, as fórmulas quantificadas com quantificadores do tipo “muitos”, “poucos”, “a maioria” ou “a metade” variam de acordo com as variações do tamanho do universo utilizado. Por isso Barwise e Cooper (1981) afirmam que não há porque quantificadores generalizados serem considerados símbolos lógicos.

3 Quantificadores Generalizados

Tendo em vista que existem, na linguagem natural, muitas expressões de quantidade que não podem ser formalizadas apenas pelos quantificadores da linguagem da lógica clássica de primeira ordem e, além disso, expressões que envolvem o infinito como os prefixos numéricos de fórmulas, também não podem ser expressas pelos quantificadores da lógica clássica de primeira ordem, surgiram então propostas de teorias com quantificadores generalizados.

3.1 Quantificadores Generalizados de A. Mostowski

O primeiro a desenvolver este tipo de teoria, pensando mais em um viés matemático, foi Andrzej Mostowski, que apresentou, em 1957, o trabalho intitulado *On a generalization of quantifiers*, sobre quantificadores generalizados destinados a estender a teoria da quantificação clássica com outras expressões quantificadas.

Os quantificadores generalizados encontrados em Mostowski (1957) são quantificadores matematicamente interessantes e que não podem ser definidos por meio dos quantificadores universal e existencial. O autor trata de operadores que representam uma generalização natural dos quantificadores lógicos. Estes quantificadores caracterizam uma família de quantificadores não-lógicos.

A seguir exporemos as definições de Mostowski (1957).

Sejam I um conjunto arbitrário e I^* o seu produto cartesiano ($I^* = I \times I \times ... \times I ...$), isto é, I^* é o conjunto de todas as sequências $\vec{x} = (x_1, x_2, ...)$, com $x_j \in I$ e j = 1,2,.... Indicamos os valores de verdade, falso e verdadeiro, por $\perp$ e $\top$, respectivamente.

Uma *função proposicional* F em I é uma função de I^* em $\{\perp, \top\}$ que satisfaz a condição:

- Existe um conjunto finito de inteiros K tais que: se $x = (x_1, x_2, ...) \in I^*$, $y = (y_1, y_2, ...) \in I^*$ e $x_j = y_j$, para $j \in K$, então, $F(x) = F(y)$, ou seja:

Com a condição acima percebemos que F depende essencialmente de um conjunto finito de argumentos. O menor conjunto K com a propriedade determinada acima é chamado *suporte* de F.

Seja A uma função bijetiva de *I* sobre um conjunto *I'*, não necessariamente diferente de *I*. Se $x = (x_1, x_2,\ldots) \in I^*$, então denotamos por A(x) a sequência $(A(x_1), A(x_2),\ldots)$. Se F é uma função proposicional em *I*, então denotamos por F_A a função proposicional em *I'* tal que $F_A(A(x)) = F(x)$.

Definimos um *quantificador limitado* para *I* como uma função **Q** que atribui um dos elementos $\bot$, $\top$ para cada função proposicional F em *I* com um argumento e que satisfaz a condição $\mathbf{Q}(F) = \mathbf{Q}(F_A)$, para toda F e toda permutação A de *I*.

Seja (m_ξ, n_ξ) uma sequência (finita ou transfinita) de todos os pares de números cardinais que satisfazem a equação $m_\xi + n_\xi = |I|$, em que $|I|$ denota o número cardinal de I. Em outras palavras, (m_ξ, n_ξ) é uma sequência (finita ou transfinita) de forma que, dada uma relação $R \subseteq I$, $m_\xi = |R|$ é a cardinalidade de R e $n_\xi = |R|^c$ é a cardinalidade do complementar de R. Para toda função T que atribui um dos valores de verdade para cada par (m_ξ, n_ξ) temos $\mathbf{Q}_T(F) = T(|F^{-1}(\top)|, |F^{-1}(\bot)|)$.

Salientamos que $\underset{x \in X}{E}[W(x)]$ denota o conjunto dos elementos x em X que satisfazem a condição W(x). Se F é uma função de X em Y, então $F^{-1}(y)$ denota o conjunto $\underset{x \in X}{E}[F(x) = y]$.

O seguinte teorema está demonstrado em Mostowski (1957): (i) $\mathbf{Q}_T$ é um quantificador limitado para *I*; (ii) para todo quantificador limitado para *I* existe uma função T tal que $\mathbf{Q}_T = \mathbf{Q}$.

Suponhamos $T^*(m_\xi, n_\xi) = \sim T(m_\xi, n_\xi)$. O quantificador determinado por T* é um *dual* de $\mathbf{Q}_T$, ele é denotado por $\mathbf{Q}_T^*$.

Definimos um *quantificador ilimitado* (ou simplesmente um quantificador) como uma função que atribui um quantificador limitado $\mathbf{Q}_I$ em *I*, para todo conjunto *I* e que satisfaz a equação $\mathbf{Q}_I(F) = \mathbf{Q}_{I'}(F_A)$ para toda função proposicional F em *I* com um argumento e para toda função bijetiva de *I* em *I*'.

As operações booleanas sobre quantificadores limitados e ilimitados são simples. Utilizando os símbolos usuais $\vee$, $\wedge$ e ~ de maneira que, por exemplo, $\mathbf{Q}_I'\vee\mathbf{Q}_I''$ é uma função $\mathbf{Q}_I$ tal que $\mathbf{Q}_I(F) = \mathbf{Q}_I'(F) \vee \mathbf{Q}_I''(F)$, para cada função proposicional F.

Vejamos como os quantificadores existencial e universal podem ser expressos através desta definição:

<u>Quantificador existencial</u> ($\exists$): Se $\{T(m_\xi, n_\xi) = \top\} \equiv \{m_\xi \neq 0\}$, então $\mathbf{Q}_T$ é o quantificador existencial $\exists$ limitado para *I*;

<u>Quantificador universal</u> ($\forall$): O dual de $\mathbf{Q}_T$ é o quantificador universal $\forall$ limitado para *I*, ou seja, o quantificador universal $\forall$ limitado para *I* é $\mathbf{Q}_T$ se $\{T(m_\xi, n_\xi) = \top\} \equiv \{n_\xi = 0\}$.

Mostowski (1957) introduz, assim, um cálculo formal que completa o cálculo de primeira ordem através da inclusão de um novo conjunto de quantificadores na sua sintaxe. Desta forma, tudo o que é válido no cálculo de primeira ordem (CQC) também é válido nesse novo sistema lógico.

Consideremos (S) um cálculo formal lógico que se diferencia do CQC porque a linguagem deste novo sistema possui um conjunto de símbolos ($\mathbf{Q}^1$, $\mathbf{Q}^2$, ..., $\mathbf{Q}^s$), com $s \in \mathbb{N}^*$, cuja função é representar tanto os quantificadores novos, quanto os quantificadores existencial ($\exists$) e universal ($\forall$).

As regras de construção de fórmulas por meio dos símbolos universal e existencial são substituídas pela regra: se F é uma fórmula e x uma variável, então $(\mathbf{Q}^j x)$ F(x) é uma fórmula, para j = 1, 2, ..., s.

Na fórmula $(\mathbf{Q}^j x)$ F(x), a variável x ocorre *ligada*. Uma fórmula *fechada* é uma fórmula em que todas as variáveis ocorrem ligadas. Quando a variável não está ligada, está *livre*.

A satisfação das fórmulas de (S) também é tratada por Mostowski.

Mostowski (1957)não conseguiu demonstrar a completude em seu cálculo formal. Ele fala do problema da completude que advém da resposta à questão sobre o conjunto de fórmulas verdadeiras ser recursivamente enumerável e formula apenas parte do resultado. Em seu artigo *The completeness of logic with the added quantifier "there are uncountably many"*, de 1964, Vaught demonstrou que o conjunto de fórmulas válidas de (S) é recursivamente enumerável e, também, demonstrou a completude da lógica com o quantificador de Mostowski.

A demonstração da completude da lógica com o quantificador de Mostowski feita por Vaught era muito complicada. Keisler em seu artigo *Logic with the quantifier "there exist uncountable many"*, de 1970, também demonstrou a completude, porém, de uma forma mais simples e clara, por meio da utilização de modelos fracos.

A lógica (S) de Mostowski trabalha com conceitos que não podem ser tratados no CQC como, por exemplo, a distinção entre conjuntos infinitos e conjuntos finitos; contáveis e não contáveis. Isto porque a definição desses quantificadores está intimamente ligada com a cardinalidade de conjuntos. Esses conceitos de infinitude e enumerabilidade são essenciais para a matemática moderna, daí a importância de se tratar destes conceitos num campo formal.

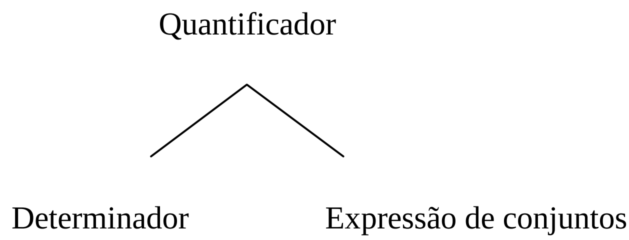
De acordo com Frápolli Sanz (2007), Lindström, em 1966, fez contribuições a esta proposta de Mostowski e, em 1974, Montague relacionou os quantificadores generalizados com a linguagem natural ao apresentar uma teoria que descreve expressões substantivas e determinadores da linguagem natural. Explicaremos estes conceitos posteriormente, através do conceito de quantificadores generalizados de Barwise e Cooper.

Assim, a partir da caracterização sintática de Mostowski-Lindström, a abordagem semântica de Montague, Barwise e Cooper (1981) introduziu uma teoria que relaciona expressões substantivas da linguagem natural com quantificadores generalizados da lógica, veremos alguns detalhes desta teoria a seguir.

3.2 Quantificadores Generalizados de J. Barwise e R. Cooper

Barwise e Cooper (1981), diferentemente de Mostowski que tinha pretensões de formalizar conceitos matemáticos, desenvolveram sua teoria sobre quantificadores generalizados tendo em vista a aproximação da lógica com a linguagem natural. Esta aproximação é demasiadamente importante por interessar não somente aos lógicos e aos matemáticos, mas também a linguistas e cientistas da computação.

Para Barwise e Cooper (1981), ao tratarmos, por exemplo, do que seria o quantificador 'mais da metade' há diferença entre dizermos 'mais da metade dos sapatos de Maria' e 'mais da metade de todas as coisas'. Isto porque não podemos de modo simples formalizar um quantificador ‘mais da metade’ como ‘mais da metade de x (...x...)’. Desta forma, eles propõem que ‘mais da metade’ deve ser visto como um determinador e não como um quantificador. O quantificador é, então, formado por um *determinador* (termo de contagem) e uma *expressão de conjuntos* (conjunto arbitrário de coisas), como esquematizado a seguir:



Por exemplo, na frase ‘Muitas pessoas votaram em Carter’, o quantificador é ‘muitas pessoas’, em que ‘muitas’ é o determinador e ‘pessoas’ a expressão de conjuntos. Comparando esta forma de entendermos um quantificador com nossa linguagem natural percebemos que estamos lidando com expressões substantivas, conhecidas por NPs (noun-phrase).

Barwise e Cooper (1981) apresentam uma semântica e uma sintática para quantificadores generalizados envolvendo o conceito de expressões substantivas. Ademais, falam sobre aplicações para expressões substantivas do inglês e relacionam os quantificadores generalizados à teoria linguística.

Os estudos feitos por Barwise e Cooper parecem se tratar de uma sintática e uma semântica que abrangem tudo o que identificamos como quantificadores. Estaríamos considerando, assim, que todos os quantificadores são expressões substantivas e que todas as expressões substantivas são quantificadores.

Porém o assunto não é tão simples e uma definição absoluta de quantificador não foi encontrada através da teoria de Barwise e Cooper (1981). Encontramos em (Loebner, 1987) uma revisão crítica das afirmações empíricas contidas na Teoria sobre Quantificadores Generalizados.

Em Barwise e Cooper (1981, p. 177) encontramos a seguinte afirmação:

> Provavelmente seria errado afirmar que os NP’s são os únicos quantificadores da linguagem natural. (Parece possível, por exemplo, que os advérbios temporais expressem quantificadores sobre momentos ou intervalos de tempo, como tem sido sugerido por Partee (1973); Dowty (1979) e outros). Parece razoável, no entanto, afirmar que as expressões substantivas da lingua-

> gem são todos e somente os quantificadores sobre o universo de discurso, ou seja, o conjunto E de coisas fornecidas pelo modelo.

O trecho "as expressões substantivas de uma linguagem são todos e somente os quantificadores sobre o universo de discurso" é citado por Loebner (1987, p. 181) a fim de iniciar uma discussão sobre este fato não ser tão fechado, nem tão feliz ou desejável como Barwise e Cooper supõem. Colocamos um trecho maior para mostrar que em Barwise e Cooper (1981) há indícios que não está tão certo fazer esta afirmação. No entanto, tanto o que Loebner (1987) deseja discutir, quanto o fato de Barwise e Cooper (1981) assumirem que existem outros quantificadores, pelo menos os quantificadores advindos de advérbios temporais, que não são expressões substantivas, nos diz que a sintática e a semântica apresentadas em Barwise e Cooper (1981) não dão conta de todos os quantificadores da linguagem natural.

Loebner (1987) argumenta que existem, na literatura, três subclasses de substantivos: substantivos definidos, substantivos indefinidos e substantivos quantificacionais em sentido estrito, sem considerar a quarta subclasse de substantivos interrogativos. As três subclasses de substantivos diferem sintática e semanticamente e somente na última, em geral, os substantivos devem ser considerados quantificadores.

Segundo o autor, nem substantivos definidos, nem indefinidos são quantificadores. Pois, substantivos definidos são termos, e a própria distinção entre termos e quantificadores é suficiente para justificar a distinção. Já os substantivos indefinidos podem ocorrer em sentenças quantificacionais, porém neste caso, o contexto deve cumprir algumas condições e, desta forma, substantivos indefinidos não podem ser simplesmente considerados como quantificadores.

Assim, apesar da teoria proposta por Barwise e Cooper (1981) ser importante para a teoria dos quantificadores generalizados e servir de base para diversos pesquisadores, como Benthem (1983), Westerståhl (2006) e outros, não consegue captar a noção geral de quantificadores.

4 Definições e abordagens dos quantificadores

4.1 Abordagens dos quantificadores

De acordo com Hintikka e Sandu (1994) podemos distinguir três abordagens, ou interpretações, diferentes para analisar de que forma os quantificadores são usados nas linguagens formais e naturais. A seguir citaremos estas abordagens:

(i) Quantificadores como predicados de ordem superior. Nesta abordagem, por exemplo, o quantificador existencial na expressão $\exists x\ A(x)$ significa que o predicado A(x) não é vazio. Esta interpretação é a mais popular, podendo ser considerada padrão e é defendida, entre outros, por Quine e Davidson.

(ii) Interpretação substitucional dos quantificadores. A expressão mencionada no item (i) é interpretada como ‘ pelo menos uma instância substituída de A(x) é verdadeira’. Esta abordagem é defendida, dentre outros, por Mates e Marcus.

(iii) Quantificadores incorporando funções de escolha. Nesta abordagem, quantificadores são expressos por locuções tal como ‘dado um valor de x, pode-se encontrar um valor de y tal que...’.

A abordagem em (i) é conhecida como interpretação objetual. De acordo com Frápolli Sanz (2007), o filósofo americano Willard van Orman Quine foi o primeiro a desenvolver e defender esta interpretação. Isto aconteceu devido à conexão que Quine acredita existir entre os quantificadores e a ontologia.

Aparentemente, a escolha da abordagem parece não importar, porém a escolha acarretará em consequências filosóficas importantes. Haack (2002) trata de duas interpretações, a objetual e a substitucional. Para a autora:

> Vai fazer diferença para a definição de verdade para sentenças quantificadas qual interpretação dos quantificadores for adotada... Se os quantificadores são interpretados substitucionalmente, então a verdade das fórmulas quantificadas pode ser definida diretamente em termos da verdade de fórmulas atômicas... Se os quantificadores são interpretados objetualmente, a definição de verdade vai ser menos direta (HAACK, 2002, p. 85).

Aqui vemos maneiras de se trabalhar com os quantificadores e, como vimos acima com Haack (2002), este estudo faz discussões pertinentes em relação a teorias da quantificação, porém, este estudo não define o que são quantificadores (nem se propõe a tal fato).

4.2 Definições de quantificadores

Existem muitos estudos sobre os quantificadores e muitas propostas surgiram após os quantificadores generalizados desenvolvidos por Mostowski, a maioria com a intenção de tentar aproximar ao máximo uma linguagem formal da linguagem natural. No entanto, o que são os quantificadores da linguagem natural?

Não foi encontrada uma definição absoluta que abranja todos os quantificadores contidos na linguagem natural. Também ainda não se conseguiu fazer isto formalmente, pois as propostas conseguem tratar apenas de alguns quantificadores da linguagem natural. Escreveremos abaixo algumas definições encontradas em dicionários.

Segundo o dicionário Aurélio (FERREIRA, 2004), para os Estudos da Linguagem, *quantificador* é um 'vocábulo que exprime quantidade, como todos, alguns, cada, muito' e para a Lógica é um 'termo lógico que determina a atribuição de um predicado a todos ou a alguns dos objetos de uma classe'. Ainda segundo o dicionário Aurélio, *quantificador existencial* é um 'termo lógico que indica a existência de, pelo menos, uma coisa' e *quantificador universal*, um 'termo lógico que indica a atribuição de um predicado a todos os objetos de uma classe'.

Com base nessas definições, entende-se que a Lógica trata apenas dos quantificadores universal e existencial, o que não é verdade. Como vimos, há autores, da área da Lógica, como Mostowski, interessados em quantificadores que diferem do universal e do existencial.

Para o Dicionário Oxford de Filosofia, que é um dicionário mais relevante para o nosso interesse:

> Informalmente um quantificador é uma expressão que assinala a quantidade de vezes que um predicado é satisfeito numa classe de coisas (i.e., num "domínio")'. Assim, ao investigar uma classe de crianças e suas dietas, poderíamos descobrir que algumas comem bolos, ou que todas comem bolos, ou que nem todas comem bolos, ou que nenhuma come bolos. "Alguns" e "todos" são representados na lógica moderna por quantificadores. O ponto importante é que este tratamento afasta a idéia de que termos como "algo", "nada" e seus cognatos são uma espécie de nomes (BLACKBURN, 1997, p. 328).

O Dicionário Oxford de Filosofia fala também dos quantificadores clássicos, do fato que podemos definir o que chama 'quantificadores matemáticos' como "mais da metade" e "exatamente um". Fala também da existência de 'quantificadores de pluralidade' como é o caso de "muitos" e "poucos", afirmando que estes são menos comuns. Ademais, define quantificadores em termos formais da seguinte maneira:

> [...] um quantificador liga uma variável, transformando uma frase aberta com n variáveis livres diferentes numa outra frase com n-1 variáveis livres diferentes (uma letra individual conta como uma só variável, apesar de poder ocorrer várias vezes numa fórmula). Quando não restam quaisquer variáveis livres temos uma frase fechada, i.e., uma frase que pode ser avaliada como verdadeira ou falsa num domínio. Por exemplo, a partir da frase aberta $Fx \wedge Gx$ podemos formar a frase fechada $(\exists x)\ (Fx \wedge Gx)$, que significa que algo é simultaneamente F e G. A única variável, x, está ligada nas duas ocorrências (BLACKBURN, 1997, p. 328).

Uma última definição sobre quantificador que será exposta é a encontrada no Dicionário de Lógica:

> Sumariamente, quantificadores são palavras ou expressões que se prestam para indicar que houve quantificação. Ao lado de numerais, a língua comum admite inúmeros quantificadores. Entre eles, todos, muitos, alguns, vários, cada, um, punhado, diversos, um determinado, etc. A Lógica tem-se concentrado em dois desses quantificadores: ‘todos’ e ‘alguns’ (embora, é claro, em estudos especializados outros quantificadores tenham sido considerados).
> Vários símbolos têm sido adotados para indicar a quantificação universal (correspondente a ‘todos’) e a existencial – que, preferentemente, seria denominada quantificação particularizadora (correspondente a ‘alguns’). Aqui, usaremos o “A” invertido $\forall$ e o “E” rebatido $\exists$, respectivamente. Ao lado desses dois, há o quantificador individualizador (ou descritor), também frequentemente empregado (para o qual se usa a letra grega iota, ι) (HEGENBERG, 1995, p. 170-171).

É notório que estas definições, apesar das duas últimas não citar apenas os quantificadores clássicos, não definem de forma absoluta o conceito de quantificadores como gostaríamos de encontrar.

Descrevemos neste trabalho os esforços de diversos pensadores que contribuíram com estudos sobre quantificadores. Desde Aristóteles, que já trabalhava com os quantificadores universal e existencial; Frege e Pierce que desenvolveram teorias para tratar dos quantificadores; teorias sobre quantificadores generalizados, mais especificamente as teorias de Mostowski (1957) e Barwise e Cooper (1981); discussões em relação às abordagens dos quantificadores e até definições vindas de dicionários. No entanto, não há uma definição absoluta que abranja todos os quantificadores, nem formalmente, nem na linguagem natural. Acredito, assim, que ainda há muito a ser desenvolvido nesta área.

Referências

BARWISE, J.; COOPER, R. Generalized quantifiers and natural language. *Linguistics and Philosophy,* v. 4, 1981. p. 159-219.

BENTHEM, J. V. Determiners and logic. *Linguistics and Philosophy,* v. 6, n. 4. Holland: D.

Reidel Publishing Company, 1983. p. 447-478.
BLACKBURN, S. *Dicionário Oxford de filosofia*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1997.
FEITOSA, H. A., PAULOVICH, L. *Um prelúdio à lógica*. São Paulo: Editora UNESP, 2005.
FERREIRA, A. B. de H. *Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa*. 3. ed. rev. e atual. Curitiba: Positivo, 2004.
FRÁPOLLI SANZ, M. J. Cuantificadores. In: FRÁPOLLI SANZ, M. J. (Coord.). *Filosofía de la lógica*. Madrid: Tecnos, 2007. p. 151-178.
HAACK, S. *Filosofia das lógicas*. Tradução de C. A. Mortari e L. H. A. Dutra. São Paulo: Editora UNESP, 2002. Título original: *Philosophy of logics*.
HEGENBERG, L. *Dicionário de Lógica*. São Paulo: EPU, 1995.
HINTIKKA, J.; SANDU, G. What is a quantifier? *Synthese*, v. 98, 1994. p. 113-129.
KRAUSE, D. *Capítulo4: Lógica e Ontologia*, 2009. Disponível em: <http://www.cfh.ufsc.br/~dkrause/pg/cursos/Ontologia/LogOnto(LaTeX).pdf>. Acesso em: 20 de ago. 2010.
LOEBNER, S. Natural language and generalized quantifiers theory. In: GÄRDENFORS, P. (Ed.). *Generalized quantifiers*. Holland: D. Reidel Publishing Company, 1987. p. 181-201.
MACHADO, N. J.; CUNHA, M. O. *Lógica e linguagem cotidiana*: verdade, coerência, comunicação, argumentação. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
MOSTOWSKI, A. On a generalization of quantifiers. *Fundamenta Mathematicæ*, v. 44, 1957. p. 12-36.
TARSKI, A. *Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences*. Tradução de O. Helmer. Mineola: Dover Publications, 1995. Título original: *O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej*.
WESTERSTÅHL, D. Generalized quantifiers. *Stanford Encyclopedia of Philophy*, 2005. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/entries/generalized-quantifiers/>. Acesso em: 11 de jan. 2006.

Artigo recebido em: 26/03/11
Aceito em: 18/07/11